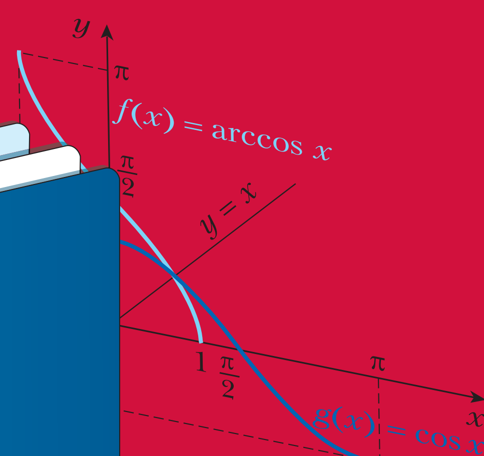
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

10 класс

Алгебра и начала математического анализа



Базовый уровень

вентана граф

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгоритм успеха

российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Базовый уровень

Учебное пособие

под редакцией В. Е. Подольского

4-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М52

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень : 10 класс : учебное пособие / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский и др. ; под ред. В. Е. Подольского. — 4-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2019. — 368 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10623-4

Учебное пособие предназначено для изучения алгебры и начал математического анализа в 10 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к алгебре и началам математического анализа.

Учебное пособие входит в систему «Алгоритм успеха».

Содержание учебного пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич, **Номировский** Дмитрий Анатольевич
Полонский Виталий Борисович, **Якир** Михаил Семёнович

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

10 класс. Базовый уровень

Учебное пособие

Редакторы *Н. В. Самсонова, И. В. Савельева, Е. В. Буцко*. Макет, внешнее оформление *Е. В. Чайко*. Художник *Ю. А. Белобородова*. Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*
Технический редактор *Л. В. Коновалова*. Корректор *О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать 19.10.18. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskervilleITC
Печать офсетная. Печ. л. 23,0. Тираж 2000 экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5

росучебник.рф/метод

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
можно отправлять по электронному адресу: expert@rosuchebnik.ru
По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь:
тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@rosuchebnik.ru
Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы:
lecta.rosuchebnik.ru, тел.: 8-800-555-46-68
В помощь учителю и ученику: регулярно пополняемая библиотека дополнительных материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы, вебинары и видеозаписи открытых уроков росучебник.рф/метод

ISBN 978-5-360-10623-4

Глава 5. Производная и её применение

В этой главе вы ознакомитесь с такими понятиями, как предел функции в точке, непрерывность функции в точке, производная функции в точке.

Вы научитесь применять производную для исследования свойств функций и построения графиков функций.

§ 33. Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1$ и точку $x_0 = 1$. Если значения аргумента x стремятся к числу 1 (обозначают: $x \to 1$), то соответствующие значения функции f стремятся к числу 2 (обозначают: $f(x) \to 2$) (рис. 33.1).

Иными словами, если значения аргумента брать всё ближе и ближе к числу 1, то соответствующие значения функции f будут всё меньше и меньше отличаться от числа 2.

В этом случае говорят, что число 2 является **пределом функции f в точке** 1, и записывают:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

или

$$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Также используют такую запись: $f(x) \to 2$ при $x \to 1$.

С помощью рисунка 33.2 можно, например, установить, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1$.

Рис. 33.1

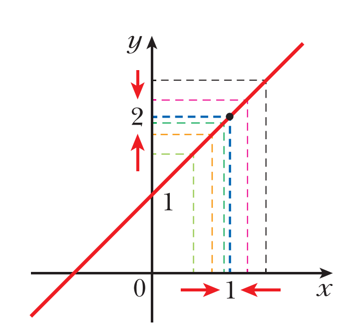
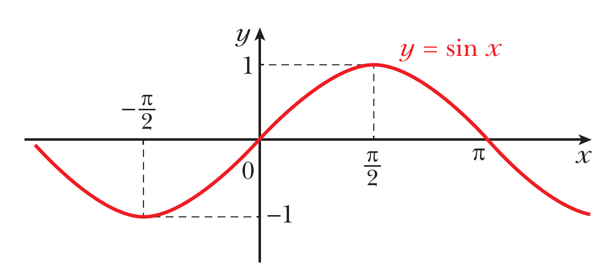


Рис. 33.2



Если обратиться к рисунку 33.3, то можно записать:

$$\lim_{x \to 1} \arccos x = 0, \quad \lim_{x \to -1} \arccos x = \pi.$$

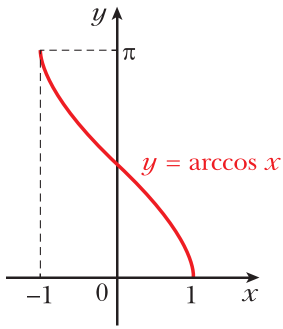


Рис. 33.3

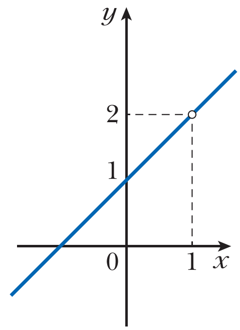


Рис. 33.4

На рисунке 33.4 изображён график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 1$, а во всех других точках совпадает с функцией $y = x + 1$ (сравните рис. 33.1 и 33.4). Однако если значения аргумента x, где $x \neq 1$, стремятся к числу 1, то соответствующие значения функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ стремятся к числу 2, то есть $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

Этот пример показывает, что функция может быть не определена в точке, но иметь предел в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. При $x > 0$ получаем: $f(x) = 1$, при $x < 0$ получаем: $f(x) = -1$. График функции f изображён на рисунке 33.5.

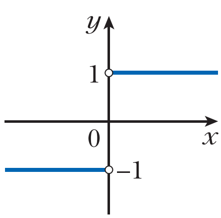


Рис. 33.5

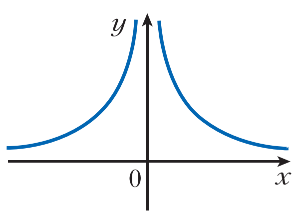


Рис. 33.6

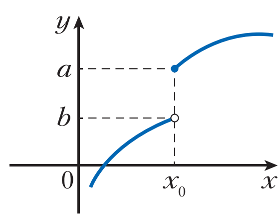


Рис. 33.7

Если значения аргумента x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то невозможно утверждать, что значения функции f стремятся к какому-нибудь определённому числу. Действительно, если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь отрицательными, то соответствующие значения функции стремятся к −1, а если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции стремятся к 1.

Поэтому функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет предела.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 33.6). Если значения x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то соответствующие значения функции становятся всё бо́льшими и бо́льшими и неограниченно увеличиваются. Поэтому не существует числа, к которому стремятся значения функции f при условии, что значения аргумента стремятся к 0.

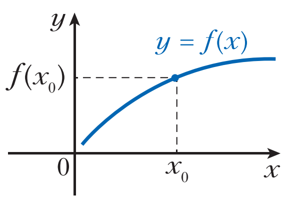
Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

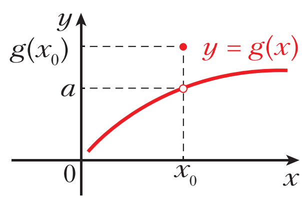
Мы привели примеры двух функций, которые не определены в некоторой точке и не имеют предела в этой точке.

Ошибочным было бы считать, что если функция определена в некоторой точке x_0, то она обязательно имеет предел в этой точке. На рисунке 33.7 изображён график функции f, которая определена в точке x_0, но не имеет предела в этой точке.

На рисунке 33.8 изображены графики функций f и g, которые определены в точке x_0 и имеют предел в этой точке. Однако поведение этих функций в точке x_0 существенно различается. График функции g, в отличие от графика функции f, в точке x_0 имеет *разрыв*. Такое различие поведения функций f и g в точке x_0 можно охарактеризовать с помощью предела.

Рис. 33.8





Для функции g имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функции f можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

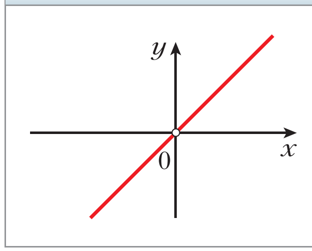
Иными словами, *предел функции f в точке x_0 равен значению функции в этой точке.*

В этом случае говорят, что **функция f является непрерывной в точке** x_0. Таким образом, на рисунке 33.8 изображён график функции f, непрерывной в точке x_0, а также график функции g, имеющей предел в точке x_0, но не являющейся непрерывной в точке x_0.

Из равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ следует, что если функция f не имеет предела в точке x_0 или не определена в этой точке, то она не может быть непрерывной в точке x_0.

Например, функция, график которой изображён на рисунке 33.7, не является непрерывной в точке x_0. Также не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция $y = \dfrac{x^2}{x}$ (рис. 33.9).

Рис. 33.9



Если функция f является непрерывной в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **непрерывна на множестве** M.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$, а функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если функция f является непрерывной на $D(f)$, то такую функцию называют **непрерывной**.

Заметим, что в рассматриваемом курсе алгебры и начал математического анализа не предполагается подробное изучение теории пределов функции в точке. Обратим внимание, что в учебнике не даётся строгое определение предела. Вместе с тем в дальнейшем мы будем пользоваться интуитивно понятными фактами этой теории. Например, $\lim\limits_{x \to 1}(1 - 2x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0} 7 = 7$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2 - x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Упражнения

33.1. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
6) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = 17$, $x_0 = 3$;
8) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

33.2. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -1$;

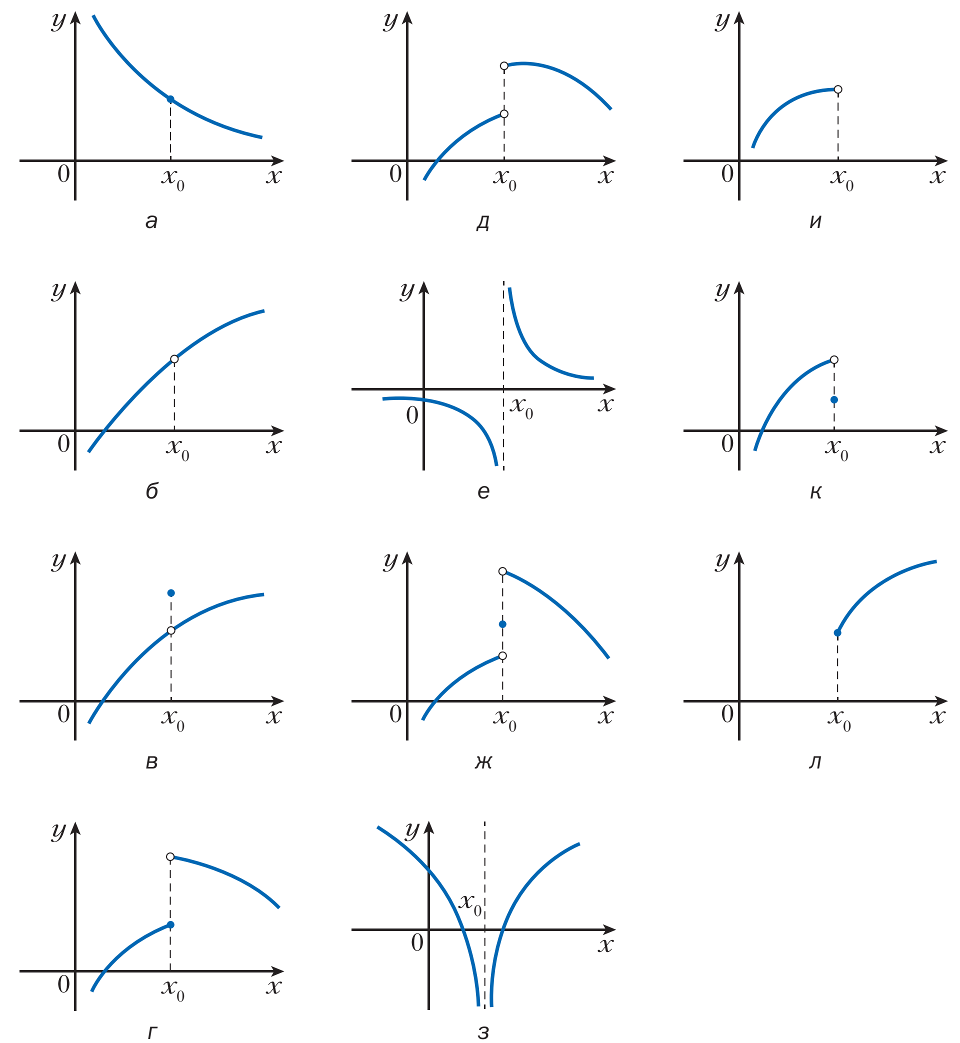
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$;

5) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

33.3. С помощью графика функции f (рис. 33.10) выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0.

Рис. 33.10



33.4. На рисунке 33.11 изображён график функции $y = f(x)$.

1) Чему равно значение функции f в точке $x_0 = 1$?

2) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 1$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

3) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 2$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

Рис. 33.11

а *б*

33.5. Значения аргумента функции f стремятся к числу x_0. Выясните, к какому числу стремятся соответствующие значения функции f:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = k$, $x_0 = a$, где k и a — некоторые числа.

33.6. Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = -1$.

33.7. Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 2, \\ x + 2, \text{ если } x \geqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x > 1, \\ x - 2, \text{ если } x \leqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

33.8. Является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x - 1, \text{ если } x \geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2$;

2) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ если } x > -1, \end{cases}$ $x_0 = -1$?

Готовимся к изучению новой темы

33.9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 7)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) -3; 3) 0.

33.10. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая:
1) $y = x - 6$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = 3$?

33.11. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A(2; 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол:
1) $60°$; 2) $120°$.

§ 34. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Если функция является математической моделью реального процесса, то часто возникает необходимость находить разность значений этой функции в двух точках. Например, обозначим через $f(t)$ и $f(t_0)$ суммы средств, которые накопились на депозитном[1] счёте вкладчика к моментам времени t и t_0. Тогда разность $f(t) - f(t_0)$, где $t > t_0$, показывает прибыль, которую получит вкладчик за время $t - t_0$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения функции f.

Если x — произвольная точка области определения функции f такая, что $x \neq x_0$, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента функции f в точке x_0** и обозначают Δx (читают: «дельта икс»)[2].

Имеем: $\Delta x = x - x_0$.

Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

---

[1] *Депозитный* — от депозит (банковский вклад) — деньги, которые вкладчик передаёт банку на некоторый срок, за что банк выплачивает вкладчику проценты.

[2] Говоря о приращении аргумента функции f в точке x_0, здесь и далее будем предполагать, что в любом промежутке вида $(x_0 - h; x_0 + h)$ есть точки области определения функции f, отличные от x_0.

Говорят, что аргумент x **получил приращение** Δx **в точке** x_0.

Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным: если $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; если $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Если аргумент в точке x_0 получил приращение Δx, то значение функции f изменилось на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эту разность называют **приращением функции** f **в точке** x_0 и обозначают Δf (читают: «дельта эф»).

Имеем:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

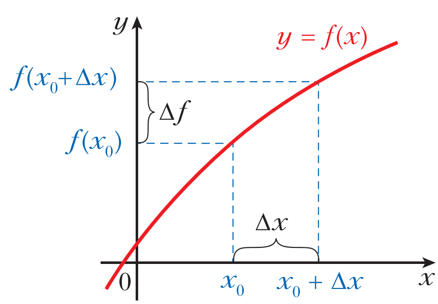
Для приращения функции $y = f(x)$ также принято обозначение Δy, то есть

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращение Δx аргумента в точке x_0 и соответствующее приращение Δf функции показаны на рисунке 34.1.

Отметим, что для фиксированной точки x_0 приращение функции f в точке x_0 является функцией с аргументом Δx.

Рис. 34.1



Пример 1. Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке x_0, которое соответствует приращению Δx аргумента.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Ответ: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◄

Задача о мгновенной скорости

Пусть автомобиль, двигаясь по прямолинейному участку дороги в одном направлении, за 2 ч преодолел путь 120 км. Тогда его средняя скорость движения равна: $v_{ср} = \frac{120}{2} = 60$ (км/ч).

Найденная величина даёт неполное представление о характере движения автомобиля: на одних участках пути автомобиль мог двигаться быстрее, на других — медленнее, иногда мог останавливаться.

Вместе с тем в любой момент времени спидометр автомобиля показывал некоторую величину — скорость в данный момент времени. Значения скорости в разные моменты более полно характеризуют движение автомобиля.

Рассмотрим задачу о поиске скорости в данный момент времени на примере равноускоренного движения.

Пусть материальная точка движется по координатной прямой и через время t после начала движения имеет координату $s(t)$. Тем самым задана функция $y = s(t)$, позволяющая определить положение точки в любой момент времени. Поэтому эту функцию называют **законом движения** точки.

Например, из курса физики известно, что закон равноускоренного движения задаётся формулой $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s_0 — координата точки в начале движения (при $t = 0$), v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

Пусть, например, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тогда $s(t) = t^2 + t$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t_0 и придадим аргументу в точке t_0 приращение Δt, то есть рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени материальная точка осуществит перемещение Δs. Имеем:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Средняя скорость $v_{ср}(\Delta t)$ движения точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Имеем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ то есть } v_{ср}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Обозначение для средней скорости $v_{ср}(\Delta t)$ подчёркивает, что при заданном законе движения $y = s(t)$ и фиксированном моменте времени t_0 значение средней скорости зависит только от Δt.

Если рассматривать достаточно малые промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, то из практических соображений понятно, что средние скорости $v_{ср}(\Delta t)$ за такие промежутки времени мало отличаются друг от друга, то есть величина $v_{ср}(\Delta t)$ почти не изменяется. Чем меньше Δt, тем ближе значение средней скорости к некоторому числу, определяющему скорость в момент времени t_0. Иными словами, если при $\Delta t \to 0$ значения $v_{ср}(\Delta t)$ стремятся к числу $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ называют **мгновенной скоростью** в момент времени t_0.

В нашем примере если $\Delta t \to 0$, то значения выражения $2t_0 + 1 + \Delta t$ стремятся к числу $2t_0 + 1$, которое является значением мгновенной скорости $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Этот пример показывает, что если материальная точка двигается по закону $y = s(t)$, то её мгновенную скорость в момент времени t_0 определяют с помощью формулы

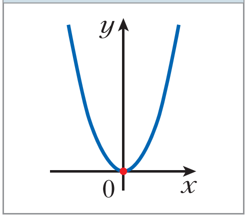
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t), \text{ то есть}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}}$$

Задача о касательной к графику функции

Известное определение касательной к окружности как прямой, которая имеет с окружностью только одну общую точку, неприменимо в случае произвольной кривой.

Рис. 34.2



Например, ось ординат имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку (рис. 34.2). Однако интуиция подсказывает, что неестественно считать эту прямую касательной к этой параболе. Вместе с тем в курсе алгебры мы нередко говорили, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

Уточним наглядное представление о касательной к графику функции.

Пусть M — некоторая точка, лежащая на параболе $y = x^2$. Проведём прямую OM, которую назовём секущей (рис. 34.3). Представим, что точка M, двигаясь по параболе, приближается к точке O. При этом секущая OM будет поворачиваться вокруг точки O. Тогда угол между прямой OM и осью абсцисс будет становиться всё меньше и меньше, и секущая OM будет стремиться занять положение оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс считают касательной к параболе $y = x^2$ в точке O.

Рис. 34.3

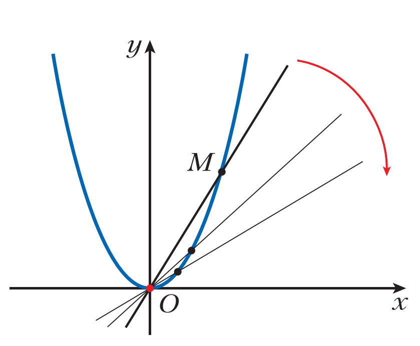
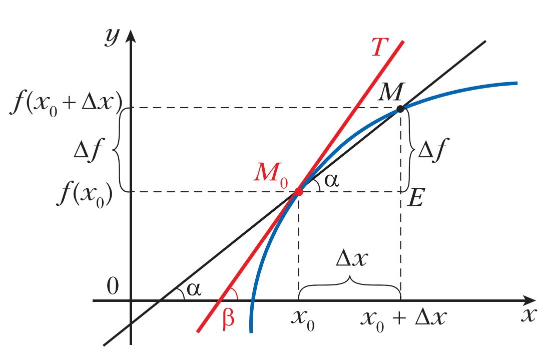


Рис. 34.4



Рассмотрим график некоторой непрерывной в точке x_0 функции f и точку $M_0(x_0; f(x_0))$. В точке x_0 придадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 34.4).

Из рисунка видно, что если Δx становится всё меньше и меньше, то точка M, двигаясь по графику, приближается к точке M_0. Если при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M стремится занять положение некоторой прямой (на рисунке 34.4 это прямая M_0T), то такую прямую называют **касательной к графику функции f в точке M_0**.

Пусть секущая M_0M имеет уравнение $y = kx + b$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Как известно, угловой коэффициент k прямой M_0M равен $\operatorname{tg}\alpha$, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, что $\angle MM_0E = \alpha$ (см. рис. 34.4). Тогда из ΔMM_0E получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введём обозначение $k_{\text{сек}}(\Delta x)$ для углового коэффициента секущей M_0M, тем самым подчёркивая, что для данной функции f и фиксированной точки x_0 угловой коэффициент секущей M_0M зависит только от приращения Δx аргумента.

Имеем: $k_{\text{сек}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть касательная M_0T образует с положительным направлением оси абсцисс угол β ($\beta \neq 90°$). Тогда её угловой коэффициент $k(x_0)$ равен $\operatorname{tg}\beta$.

Естественно считать, что чем меньше Δx, тем меньше значение углового коэффициента секущей отличается от значения углового коэффициента касательной. Иными словами, если $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{сек}}(\Delta x) \to k(x_0)$. Вообще, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 определяют с помощью формулы

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}(\Delta x), \text{ то есть}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

Пример 2. Найдите формулу для вычисления углового коэффициента касательной к графику функции $f(x) = -x^2$ в точке с абсциссой x_0. Какой угол с положительным направлением оси абсцисс образует касательная, проведённая к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Решение. Имеем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2$.

Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления углового коэффициента касательной, можно записать:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

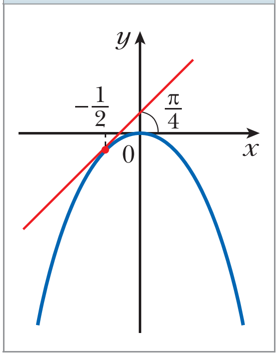
Если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $-2x_0 - \Delta x$ стремятся к числу $-2x_0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Отсюда $k(x_0) = -2x_0$.

Эта формула позволяет вычислить угловой коэффициент касательной к параболе $y = -x^2$ в любой точке, в частности в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$

Пусть касательная к параболе в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$ образует угол α $\left(0 \leqslant \alpha < \pi \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ с положительным направлением оси абсцисс. Тогда её угловой коэффициент равен $\operatorname{tg}\alpha$. Мы установили, что $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Поскольку $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 34.5). ◄

Рис. 34.5



Упражнения

34.1. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

34.2. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$; 2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

34.3. Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если:
1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

34.4. Для функции $f(x) = x^3$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

34.5. Для функции $f(x) = x^2 - x$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

34.6. Для функции $f(x) = 5x + 1$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

34.7. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 + 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

34.8. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 5t^2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите:

1) среднюю скорость тела при изменении времени от $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;

2) мгновенную скорость тела в момент $t_0 = 1$ с.

34.9. Найдите угловой коэффициент:

1) секущей графика функции $y = x^2$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_1 = 1{,}6$;

2) касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

34.10. Найдите угловой коэффициент:

1) секущей графика функции $y = x^3$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 2$ и $x_1 = 1$;

2) касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Готовимся к изучению новой темы

34.11. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите угол α.

34.12. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдите угол α.

§ 35. Понятие производной

В предыдущем параграфе, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели: пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач математики, физики, химии, биологии, экономики и других наук. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить её свойства и научиться их применять.

Определение

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от икс нулевого») или $y'(x_0)$. Можно записать:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

или

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Производную функции f в точке x_0 можно вычислить по такой схеме:

1) придав в точке x_0 аргументу приращение Δx, найти соответствующее приращение Δf функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) найти отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) выяснить, к какому числу стремится отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

<u>**Пример 1.**</u> Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Придерживаясь вышеприведённой схемы, запишем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1 + \Delta x} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{1}{1 + \Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значения выражения $-\dfrac{1}{1 + \Delta x}$ стремятся к числу -1, то есть $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\dfrac{1}{1 + \Delta x}\right) = -1$.

Ответ: -1. ◄

Отметим, что, найдя значение $f'(1)$, мы тем самым нашли угловой коэффициент $k(x_0)$ касательной, проведённой к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Он равен -1, то есть $k(1) = -1$. Тогда, обозначив через α угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси абсцисс, можем записать: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Отсюда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 35.1).

Вообще, можно сделать такой вывод: *угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен производной функции f в точке x_0*, то есть

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = f'(x_0)}}$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной**.

Исходя из определения мгновенной скорости, можно сделать такой вывод: *если $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой, то её мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной функции $y = s(t)$ в точке t_0*, то есть

$$\boxed{\boldsymbol{v(t_0) = s'(t_0)}}$$

Это равенство выражает **механический смысл производной**.

Если функция f имеет производную в точке x_0, то эту функцию называют **дифференцируемой в точке** x_0.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Из геометрического смысла производной следует, что к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести *невертикальную* касательную (рис. 35.2). И наоборот, если к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема в точке x_0.

Рис. 35.1

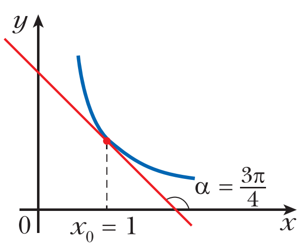
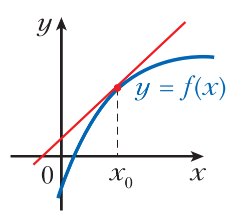
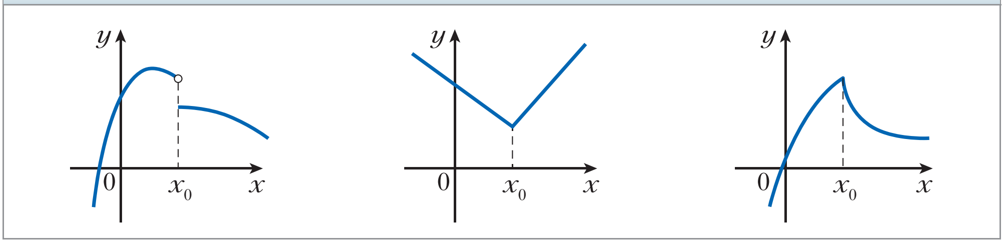


Рис. 35.2



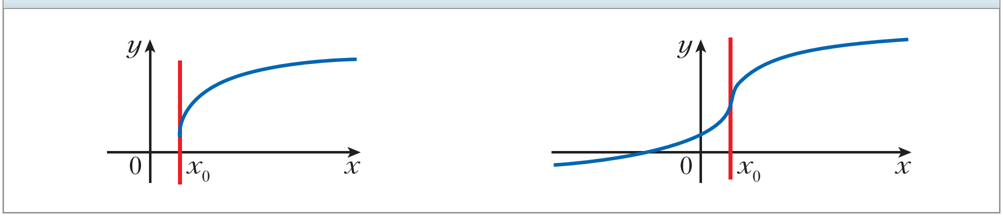
На рисунке 35.3 изображены графики функций, которые в точке x_0 имеют разрыв или излом. К указанным графикам в точке с абсциссой x_0 невозможно провести касательную. Эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

Рис. 35.3



На рисунке 35.4 изображены графики функций, которые в точке с абсциссой x_0 имеют вертикальную касательную. Поэтому эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

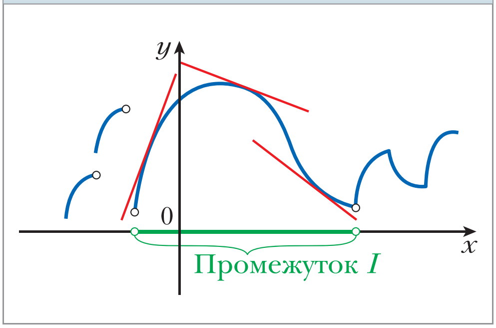
Рис. 35.4



Пусть M — множество точек, в которых функция f дифференцируема. Каждому числу $x \in M$ поставим в соответствие число $f'(x)$. Это правило задаёт функцию с областью определения M. Такую функцию называют **производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f' или y'.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **дифференцируема на множестве** M. Например, на рисунке 35.5 изображён график функции, дифференцируемой на промежутке I. На промежутке I этот график не имеет разрывов и изломов.

Рис. 35.5



Если функция f дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дифференцируемой**.

Нахождение производной функции f называют **дифференцированием** функции f.

Пример 2. Продифференцируйте функцию $f(x) = kx + b$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Следовательно, $f'(x_0) = k$.

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции f, то последнее равенство означает, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f'(x) = k$. ◄

Вывод о том, что производная линейной функции $f(x) = kx + b$ равна k, также принято записывать так:

$$\boxed{(\boldsymbol{kx} + \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{k}} \qquad (1)$$

Если в формулу (1) подставить $k = 1$ и $b = 0$, то получим:

$$\boxed{(\boldsymbol{x})' = \mathbf{1}}$$

Если же в формуле (1) положить $k = 0$, то получим:

$$\boxed{(\boldsymbol{b})' = \mathbf{0}}$$

Последнее равенство означает, что *производная функции, являющейся константой, в каждой точке равна нулю.*

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) если $\Delta x \to 0$, то при любом $x_0 \in \boldsymbol{R}$ значения выражения $2x_0 + \Delta x$ стремятся к числу $2x_0$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x. \blacktriangleleft$$

Последнее равенство также принято записывать в виде

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (2)$$

<u>**Пример 4.**</u> Найдите производную функции $f(x) = x^3$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2) =$
$= \Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2);$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2\right)}{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2;$

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$ стремятся к числу $3x_0^2$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2$.

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции f, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 3x^2. \blacktriangleleft$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) — частные случаи более общей формулы:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Формула (4) остаётся справедливой для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x \neq 0$, то есть

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \boldsymbol{Z}} \qquad (5)$$

Например, воспользуемся формулой (5) для нахождения производной функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Имеем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ или

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Формулу (5) также можно обобщить для любого $r \in \boldsymbol{Q}$ и $x > 0$:

$$\boldsymbol{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in Q} \qquad (6)$$

Например, найдём производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, воспользовавшись формулой (6). Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно, для $x > 0$ можно записать: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ или

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Вообще, производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, можно находить по формуле

$$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (7)$$

Если n — нечётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f во всех точках x таких, что $x \neq 0$.

Если n — чётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f для всех положительных значений x.

Обратимся к тригонометрическим функциям $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Эти функции являются дифференцируемыми, и их производные находят по таким формулам:

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}$$

При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных, расположенной на первом форзаце.

Упражнения

35.1. Найдите производную функции:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \frac{1-x}{3}$; 3) $y = 9$; 4) $y = 8 - 3x$.

35.2. Найдите производную функции:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

35.3. Найдите производную функции:

1) $y = x^{10}$; 2) $y = \frac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$.

35.4. Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

35.5. Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

35.6. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

35.7. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

35.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$; 3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

35.9. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$;

2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

35.10. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$.

35.11. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

35.12. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

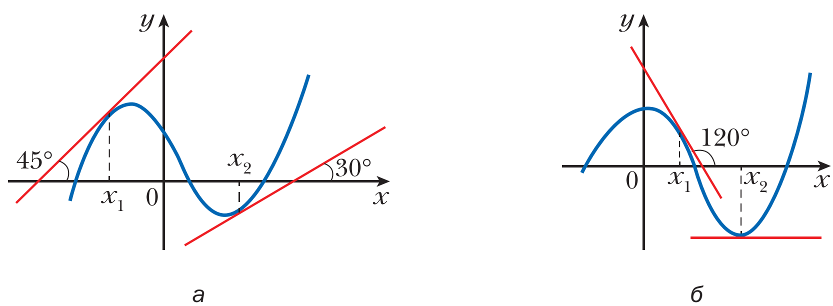
1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

35.13. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

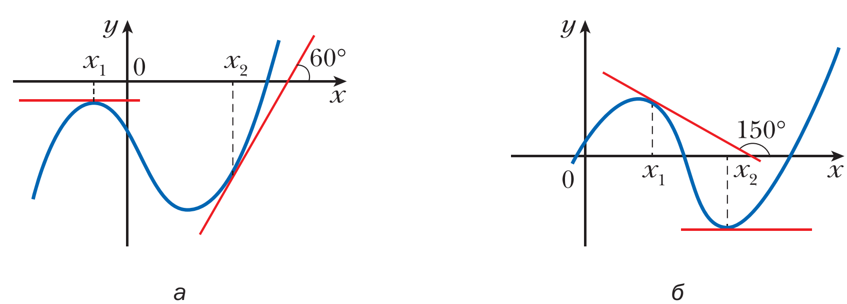
35.14. Найдите с помощью графика функции f (рис. 35.6) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Рис. 35.6



35.15. Найдите с помощью графика функции f (рис. 35.7) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Рис. 35.7



35.16. На рисунке 35.8 изображён график функции f. Укажите несколько значений аргумента x, для которых:

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

35.17. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 35.9). Найдите $f'(x_0)$.

Рис. 35.8

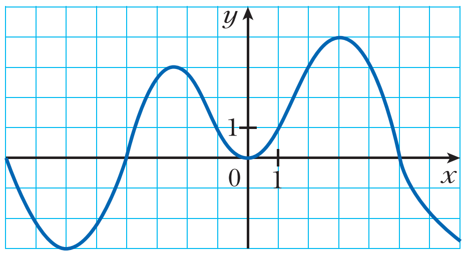
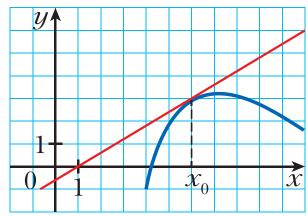


Рис. 35.9



35.18. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 35.10). Найдите $f'(x_0)$.

35.19. На рисунке 35.11 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

Рис. 35.10

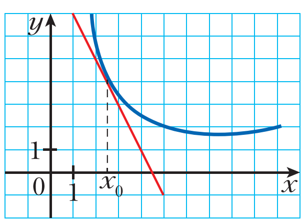
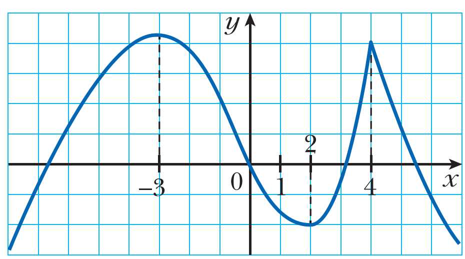


Рис. 35.11



35.20. На рисунке 35.12 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

35.21. На рисунке 35.13 изображён график функции f. Сравните:

1) $f'(-5)$ и $f'(1)$; 3) $f'(-2)$ и $f'(4)$;

2) $f'(-1)$ и $f'(6)$; 4) $f'(0)$ и $f'(5)$.

Рис. 35.12

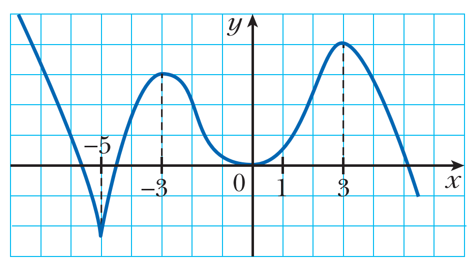
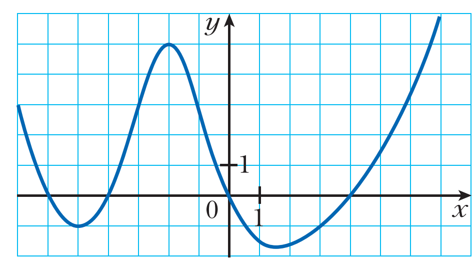


Рис. 35.13



35.22. Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;
4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

35.23. Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;
4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

35.24. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2$. Найдите $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

35.25. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3$. Найдите $s'(2)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

Упражнения для повторения

35.26. Упростите выражение $\left(\frac{a+5}{(a-9)(a+9)} + \frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2 + \frac{7+a}{9+a}$.

35.27. Решите уравнение $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$.

§ 36. Правила вычисления производных

Найдём, пользуясь определением, производную функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x -$

$- x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $2x_0 + \Delta x + 1$ стремятся к числу $2x_0 + 1$. Следовательно, при любом $x_0 \in \boldsymbol{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2 + x$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ то есть}$$

$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

Из предыдущего параграфа вам известно, что $(x^2)' = 2x$ и $(x)' = 1$. Таким образом, получаем:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Следовательно, производную функции $y = x^2 + x$ можно найти как сумму производных функций $y = x^2$ и $y = x$.

Справедлива следующая теорема[1].

Теорема 36.1
(производная суммы)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) + g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных*.

Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Для доказательства этой теоремы необходимы более глубокие знания из теории пределов функции в точке, что выходит за рамки рассматриваемого курса. Тем не менее приведём интуитивно понятные доказательные рассуждения.

---

[1] Условия теорем 36.1–36.4 предусматривают следующее: если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то соответственно функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $y = f(g(x))$ определены на некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдём приращение функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0. Имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Поскольку функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Отсюда получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, причём её производная в этой точке равна $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Теорему 36.1 можно обобщить для любого конечного количества слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Две теоремы, приведённые ниже, также упрощают нахождение производной.

Теорема 36.2
(производная произведения)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x)\,g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Следствие 1

В тех точках, в которых дифференцируема функция $y = f(x)$, также является дифференцируемой функция $y = kf(x)$, где k — некоторое число, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Также принята такая упрощённая запись:

$$(kf)' = kf'$$

Доказательство

Так как функция $g(x) = k$ дифференцируема в любой точке, то, применяя теорему о производной произведения, можно записать:

$$(kf(x))' = (k)'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Следствие 2

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) - g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доказательство

Имеем:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 36.3
(производная частного)

В тех точках, в которых функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы и значение функции g не равно нулю, функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также является дифференцируемой, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$;

3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Решение. 1) Пользуясь теоремой о производной суммы и следствием из теоремы о производной произведения, получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) По теореме о производной произведения получаем:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x - 3) + (5x - 3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x -$$
$$- 3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3 - 5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3 - 5x + 10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3 + 5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Имеем: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 =$ $= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$.

4) По теореме о производной частного получаем:

$$y' = \left(\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}\right)' = \frac{(2x^2 + 1)'(3x - 2) - (3x - 2)'(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} =$$
$$= \frac{4x(3x - 2) - 3(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}. ◄$$

Используя теорему о производной частного, легко доказать, что

$$\mathbf{(tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\mathbf{(ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Действительно, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ докажите самостоятельно.

Рассмотрим функции $f(t) = 2t - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Значения одной функции могут служить значениями аргумента другой функции. Например, $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задаёт функцию $y = f(g(x))$.

Если для любого $x \in M$ все значения функции $t = g(x)$ являются значениями аргумента функции $y = f(t)$, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$ с областью определения M.

Находить производную сложной функции можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 36.4
(производная сложной функции)

Если функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ является дифференцируемой в точке x_0, причём

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 2. Найдите значение производной функции в точке x_0:

1) $y = (3x - 7)^6$, $x_0 = 2$;
2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;
3) $y = \sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$;
4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Решение

1) Данная функция $y = (3x - 7)^6$ является сложной функцией $y = f(g(x))$, где $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Поскольку $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то по теореме о производной сложной функции можно записать:

$$y'(x) = f'(t)g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

то есть

$$y'(x) = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5; \quad y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Решение этой задачи можно оформить и так:

$$y' = ((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5;$$
$$y'(2) = -18.$$

2) $y' = \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \cdot (4x^2 + 1)' = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$;
$y'(0) = 0$.

3) $y' = \left(\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $\quad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

4) $y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{15\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}$;

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Ответ: 1) -18; 2) 0; 3) 0; 4) 180. ◄

Сформулируйте теорему о производной: 1) суммы; 2) произведения; 3) частного; 4) сложной функции.

Упражнения

36.1. Найдите производную функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;
3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

36.2. Найдите производную функции:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = -3\sin x + 2\cos x$;
4) $y = x - \frac{5}{x}$;
5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$;
6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

36.3. Найдите производную функции:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$;
5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

36.4. Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

36.5. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$;
2) $y = \frac{5}{3x - 2}$;
3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;
4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;
5) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;
6) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

36.6. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$;
2) $y = \frac{7}{10x - 3}$;
3) $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$;
4) $y = \frac{\sin x}{x}$;
5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
6) $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$.

36.7. Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 2\sin x$, $x_0 = 0$;
4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

36.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \frac{1}{4}$;
2) $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1}$, $x_0 = 1$.

36.9. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 1$;
2) $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x + 2$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

36.10. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

36.11. Могут ли две разные функции иметь равные производные? Ответ проиллюстрируйте примерами.

36.12. Найдите производную функции:

1) $y = (2x+3)^5$;
2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$;
3) $y = \cos 2x$;
4) $y = \sin^2 x$;
5) $y = 3\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$;
6) $y = \sqrt{2x+1}$;
7) $y = \sqrt[3]{1-x}$;
8) $y = \sqrt{x^2+1}$;
9) $y = \frac{1}{4x+5}$;
10) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;
11) $y = \sqrt{\sin x}$;
12) $y = \sin\sqrt{x}$.

36.13. Найдите производную функции:

1) $y = (3x-5)^6$;
2) $y = \sin\frac{x}{3}$;
3) $y = \cos^2 x$;
4) $y = 2\operatorname{tg} 4x$;
5) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
6) $y = \sqrt{1-x^2}$;
7) $y = \sqrt[4]{6x+8}$;
8) $y = (9x-2)^{-3}$;
9) $y = \sqrt{\cos x}$.

36.14. Ученик предлагает находить производную функции $y = \sin 2x$ так:
1) делает замену $2x = t$ и получает функцию $y = \sin t$;
2) далее пишет: $y' = (\sin t) = \cos t$;
3) потом подставляет значение $2x = t$ и делает вывод, что $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

В чём ошибка этого ученика?

36.15. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения тела в момент времени $t_0 = 5$ с.

36.16. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = (t + 2)^2(t + 5)$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её скорость движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

36.17. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$;   2) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

36.18. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = 0$;   2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

36.19. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$;   5) $y = \frac{\cos 3x}{x - 1}$;

2) $y = x\sqrt{2x + 1}$;   6) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$;

3) $y = \sin x \cos 2x$;   7) $y = (x + 1)^3(x - 2)^4$;

4) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x + 5)$;   8) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

36.20. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^6}$;   3) $y = \sin 2x \cos x$;

2) $y = x\sqrt{x + 3}$;   4) $y = (x + 2)^5(x - 3)^4$.

36.21. Материальная точка массой 4 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите импульс $P(t) = mv(t)$ материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

36.22. Тело массой 2 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите кинетическую энергию $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тела в момент времени $t_0 = 4$ с.

36.23. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Определите координату тела в момент времени, когда его кинетическая энергия равна нулю.

36.24. Найдите производную функции:

1) $y = \cos^3 2x$;   2) $y = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$;   3) $y = \left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^6$.

36.25. Вычислите:

1) $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$; 2) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

Готовимся к изучению новой темы

36.26. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -3)$ и параллельной оси абсцисс.

36.27. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -4)$, если угловой коэффициент этой прямой равен:

1) 4; 2) 0; 3) –1.

36.28. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных:

1) $y = 3x - 5$; 3) $y = -3x$; 5) $y - 3x + 2 = 0$;

2) $y = -3x - 5$; 4) $y = 7 - 3x$; 6) $y = \dfrac{1}{3}x + 7$.

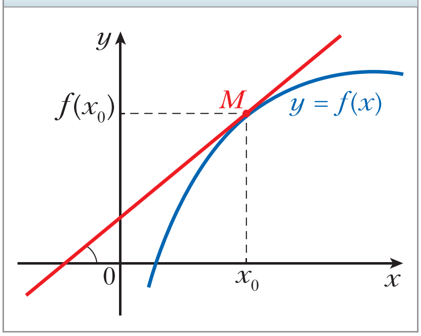
36.29. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 9)$ и параллельной прямой $y = 9x - 16$.

36.30. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

§ 37. Уравнение касательной

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную (рис. 37.1).

Рис. 37.1



Из курса геометрии 9 класса вы знаете, что уравнение невертикальной прямой имеет вид $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент этой прямой.

Исходя из геометрического смысла производной, получаем: $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной можно записать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Эта прямая проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Имеем:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Итак, если функция f дифференцируема в точке x_0, то **уравнение касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0**, имеет вид

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}}$$

Пример 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. Имеем: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$;

$f'(x) = -4 - 6x$;

$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$.

Подставив найденные числовые значения в уравнение касательной, получаем: $y = 8(x + 2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Ответ: $y = 8x + 14$. ◄

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 6x$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение. Решив уравнение $2x^2 - 6x = 0$, найдём абсциссы точек пересечения графика функции f с осью абсцисс. Имеем: $2x(x - 3) = 0$; $x = 0$ или $x = 3$.

Запишем уравнение касательной в каждой из найденных точек.

1) Если $x_0 = 0$, то $f(0) = 0$; $f'(x) = 4x - 6$; $f'(0) = -6$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -6x$.

2) Если $x_0 = 3$, то $f(3) = 0$; $f'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = 6(x - 3)$, то есть $y = 6x - 18$.

Ответ: $y = -6x$; $y = 6x - 18$. ◄

Пример 3. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x + 4}{x - 4}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$.

Решение. Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x + 4)'(x - 4) - (x - 4)'(x + 4)}{(x - 4)^2} = \frac{(x - 4) - (x + 4)}{(x - 4)^2} = -\frac{8}{(x - 4)^2}.$$

Если касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$, то её угловой коэффициент k равен -2.

Поскольку $f'(x_0) = k$, где x_0 — абсцисса точки касания искомой прямой и графика функции f, то $f'(x_0) = -2$, то есть $-\frac{8}{(x_0 - 4)^2} = -2$. Отсюда

$$(x_0-4)^2=4;\ \left[\begin{array}{l}x_0-4=2,\\ x_0-4=-2;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x_0=6,\\ x_0=2.\end{array}\right.$$

Следовательно, на графике функции $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$ существуют две точки, касательные в которых параллельны данной прямой.

При $x_0=6$ имеем: $f(x_0)=5$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-2(x-6)+5$; $y=-2x+17$.

При $x_0=2$ получаем: $f(x_0)=-3$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-2(x-2)-3$; $y=-2x+1$.

Ответ: $y=-2x+17$; $y=-2x+1$. ◄

Пример 4. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=\sqrt{2x-1}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

Решение. Имеем: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

Так как касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс, то её угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}45°$, то есть $k=1$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Тогда $f'(x_0)=1$.

Получаем: $\dfrac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=1$. Отсюда $\sqrt{2x_0-1}=1$; $2x_0-1=1$; $x_0=1$.

Ответ: 1. ◄

Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Упражнения

37.1. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x)=x^2+3x$, $x_0=-1$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;
3) $f(x)=4\sqrt{x}-3$, $x_0=9$;
4) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$;
5) $f(x)=\cos x$, $x_0=\pi$;
6) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;
7) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x_0=-2$;
8) $f(x)=\sqrt{2x+5}$, $x_0=2$.

37.2. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

5) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;

6) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

37.3. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;

2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

37.4. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$;

2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

37.5. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;

2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

37.6. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$;

2) $f(x) = 3x - x^2$.

37.7. Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - x + 1$, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 7x - 8$.

37.8. В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?

37.9. К графику функции $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Каково взаимное расположение этих касательных?

37.10. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;

2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;

3) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $\alpha = 45°$;

4) $f(x) = \frac{x + 7}{x - 2}$, $\alpha = 135°$.

37.11. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

37.12. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$;
2) $f(x) = \frac{5 - x}{x - 3}$.

37.13. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$;
2) $f(x) = \frac{4}{1 - x}$.

37.14. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$.

37.15. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

37.16. Составьте уравнение касательной к графику функции:
1) $f(x) = x^2 - 5x$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x + 1$.

37.17. Составьте уравнение касательной к графику функции:
1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = -7x + 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$.

37.18. Определите, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $f(x) = 4x^3$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.19. Определите, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.20. Определите, является ли прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.21. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

37.22. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Готовимся к изучению новой темы

37.23. Решите неравенство:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;

3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} < 0$;

5) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$;

6) $(x + 1)^3(x - 1)^2(x - 3)^6 > 0$.

§ 38. Признаки возрастания и убывания функции

Вы знаете, что если функция является константой, то её производная равна нулю. Возникает вопрос: если функция f такова, что для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то является ли функция f константой на промежутке I?

Обратимся к механической интерпретации.

Пусть $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой. Если в любой момент времени t от t_1 до t_2 выполняется равенство $s'(t) = 0$, то на протяжении рассматриваемого промежутка времени мгновенная скорость равна нулю, то есть точка не движется и её координата не изменяется. Это означает, что на рассматриваемом промежутке функция $y = s(t)$ является константой.

Эти соображения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 38.1
(признак постоянства функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.

На рисунке 38.1 изображён график функции f, которая является дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Этот график имеет такое свойство:

любая касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.

Поскольку тангенс острого угла — положительное число, то угловой коэффициент любой касательной также является положительным. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, можно сделать такой вывод: для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$.

Из рисунка 38.1 видно, что функция f возрастает на рассматриваемом промежутке.

На рисунке 38.2 изображён график функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Любая касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.

Рис. 38.1

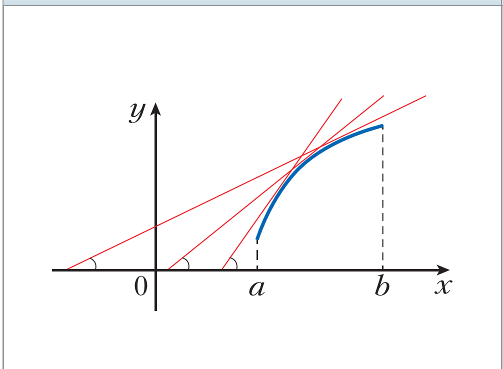
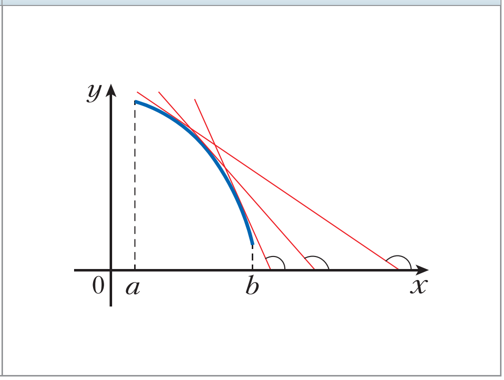


Рис. 38.2



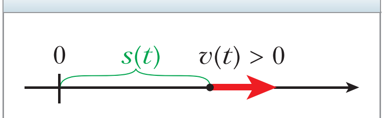
Поскольку тангенс тупого угла — отрицательное число, то угловой коэффициент любой касательной также является отрицательным. Тогда для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$.

Из рисунка 38.2 видно, что функция f убывает на рассматриваемом промежутке.

Эти примеры показывают, что знак производной функции на некотором промежутке I связан с тем, является ли эта функция возрастающей (убывающей) на промежутке I.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции можно увидеть и с помощью механической интерпретации. Если скорость, то есть производная функции $y = s(t)$, положительна, то точка на координатной прямой движется вправо (рис. 38.3). Это означает, что из неравенства $t_1 < t_2$ следует неравенство $s(t_1) < s(t_2)$, то есть функция $y = s(t)$ является возрастающей. Аналогич-

Рис. 38.3



но если скорость отрицательна, то точка движется влево, то есть функция $y = s(t)$ является убывающей.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 38.2
(признак возрастания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Теорема 38.3
(признак убывания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - 100$ возрастает на множестве действительных чисел.

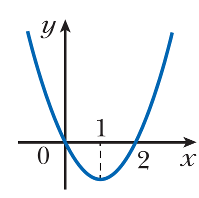
Решение. Имеем: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Поскольку $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, то функция f возрастает на множестве действительных чисел. ◄

Пример 2. Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $f(x) = x^2 - 2x$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 2x - 2$. Решив неравенства $2x - 2 > 0$ и $2x - 2 < 0$, приходим к такому: $f'(x) > 0$ на промежутке $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 1)$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1)$.

На рисунке 38.4 изображён график функции $f(x) = x^2 - 2x$. Из рисунка видно, что на самом деле функция f возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$.

Рис. 38.4



При записи ответа будем руководствоваться таким правилом: если функция f непрерывна в каком-то из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку. В нашем примере функция $f(x) = x^2 - 2x$ непрерывна в точке $x = 1$, поэтому эту точку присоединяем к промежуткам $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 1)$.

Ответ: возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. ◄

<u>Пример 3.</u> Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

2) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Решение

1) Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Исследуем знак производной методом интервалов (рис. 38.5) и учтём непрерывность функции f в точках $x = -3$ и $x = 1$. Получаем, что функция f возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-3; 1]$.

2) Имеем: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 2)^2$.

Исследовав знак производной (рис. 38.6), приходим к выводу, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

Рис. 38.5

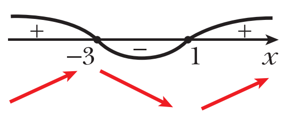
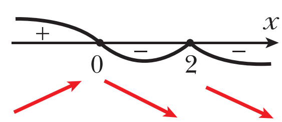


Рис. 38.6



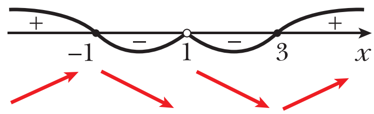
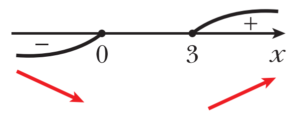
3) Имеем: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Найдя производную функции f, получаем: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$.

Исследуем знак функции $y = f'(x)$ (рис. 38.7). Теперь можно сделать такой вывод: данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $[-1; 1)$ и $(1; 3]$.

4) Имеем: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Найдём производную функции f: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$. Заметим, что в точках $x = 0$ и $x = 3$ функция f не является дифференцируемой, однако является непрерывной.

Неравенство $\dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} > 0$ равносильно системе $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$ Решив её, получаем, что множеством решений рассматриваемого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$.

Далее устанавливаем, что множеством решений неравенства $\dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} < 0$ является промежуток $(-\infty; 0)$.

Рис. 38.7	Рис. 38.8
	

Следовательно, если $x < 0$, то $f'(x) < 0$; если $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 38.8).

Поэтому функция f убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[3;\ +\infty)$. ◄

Сформулируйте: 1) признак постоянства функции; 2) признак возрастания функции; 3) признак убывания функции.

Упражнения

38.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

38.2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

38.3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

38.4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;
2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
3) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
5) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

38.5. На рисунке 38.9 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки убывания функции f.

38.6. На рисунке 38.10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на $\boldsymbol{R}$. Среди приведённых на рисунке 38.11 графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f'(x)$.

Рис. 38.9

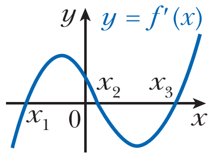


Рис. 38.10

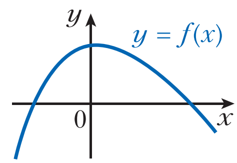
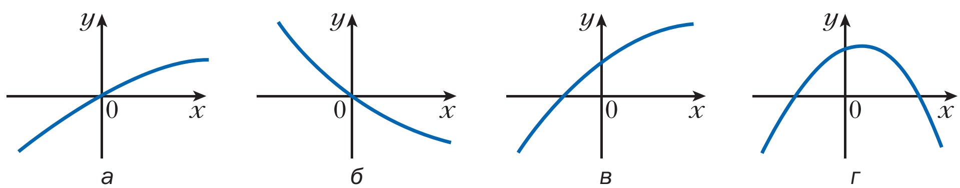


Рис. 38.11



38.7. На рисунке 38.12 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки возрастания функции f.

38.8. На рисунке 38.13 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$. Какая из функций f, g и h убывает на отрезке $[-1; 1]$?

38.9. На рисунке 38.14 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$. Какая из функций f, g и h убывает на $\boldsymbol{R}$?

Рис. 38.12

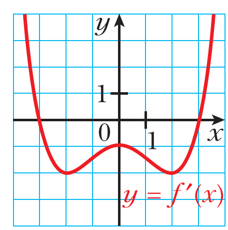


Рис. 38.13

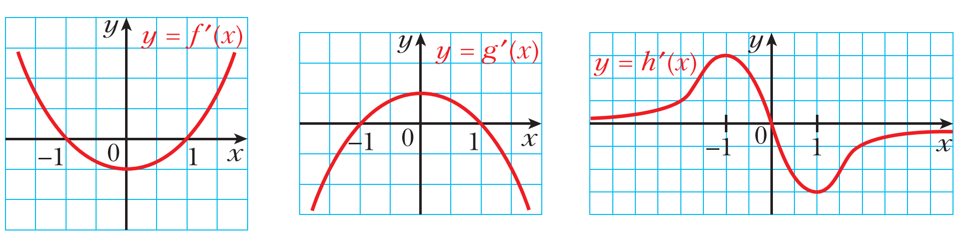
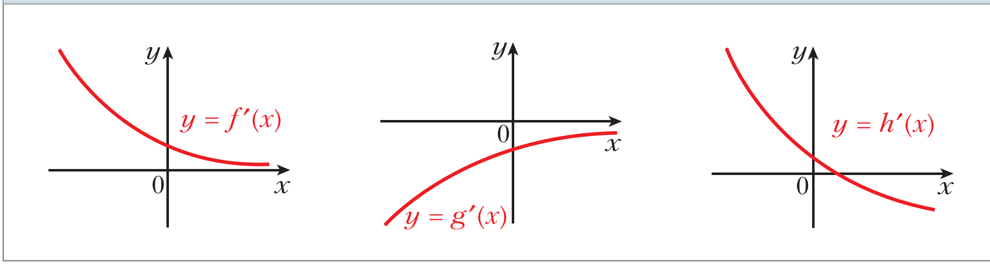


Рис. 38.14



38.10. Докажите, что функция является убывающей:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

38.11. Докажите, что функция является возрастающей:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

38.12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 3) $f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = x - \cos x$;

38.13. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

38.14. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

38.15. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Упражнения для повторения

38.16. Решите уравнение $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x - 1}$.

38.17. Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

§ 39. Точки экстремума функции

Знакомясь с такими понятиями, как предел и непрерывность функции в точке, мы исследовали поведение функции вблизи этой точки или, как принято говорить, в её **окрестности**.

Определение

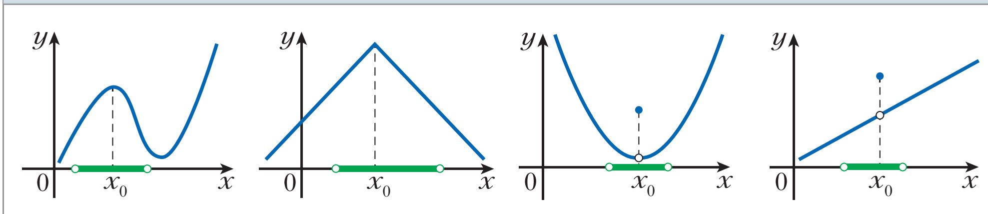
Промежуток (a; b), содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Например, промежуток (–1; 3) — одна из окрестностей точки 2,5. Вместе с тем этот промежуток не является окрестностью точки 3.

Понятно, что любая точка имеет бесконечно много окрестностей.

На рисунке 39.1 изображены графики четырёх функций. Все эти функции имеют общую особенность: существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Рис. 39.1



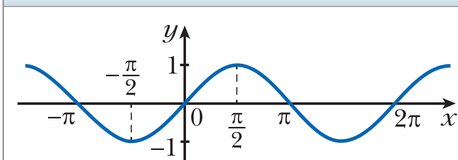
Определение

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $y = \sin x$ (рис. 39.2). Пишут: $x_{max} = \frac{\pi}{2}$.

На рисунке 39.1 $x_{max} = x_0$.

Рис. 39.2



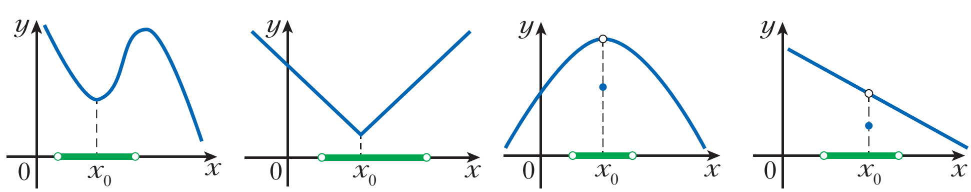
Определение

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ является точкой минимума функции $y = \sin x$ (см. рис. 39.2). Пишут: $x_{min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 39.3 изображены графики функций, для которых x_0 является точкой минимума, то есть $x_{\min} = x_0$.

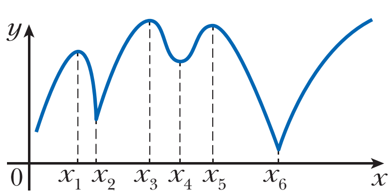
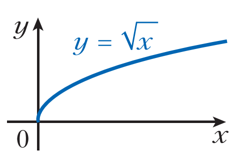
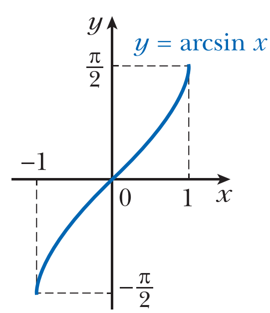
Рис. 39.3



Точки максимума и минимума имеют общее название: их называют **точками экстремума** функции (от лат. *extremum* – крайний).

На рисунке 39.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 являются точками экстремума.

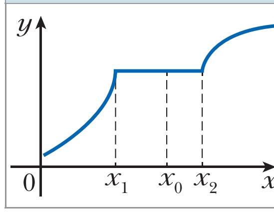
Из определений точек максимума и минимума следует, что точки экстремума являются внутренними точками[1] области определения функции. Поэтому, например, точка $x_0 = 0$ не является точкой минимума функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 39.5), а точка $x_0 = 1$ не является точкой максимума функции $y = \arcsin x$ (рис. 39.6). Вместе с тем наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$ равно нулю, то есть $\min\limits_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, а наибольшее значение функции $y = \arcsin x$ на промежутке $[-1; 1]$ равно $\frac{\pi}{2}$, то есть $\max\limits_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Рис. 39.4	Рис. 39.5	Рис. 39.6
		

[1] Точку $x_0 \in M \subset \boldsymbol{R}$ называют *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность точки x_0, являющаяся подмножеством множества M.

На рисунке 39.7 изображён график функции f, которая на промежутке $[x_1; x_2]$ является константой. Точка x_1 является точкой максимума, точка x_2 — минимума, а любая точка промежутка $(x_1; x_2)$ является одновременно как точкой максимума, так и точкой минимума функции f.

Рис. 39.7



Графики функций, изображённые на рисунках 39.8 и 39.9, показывают, что точки экстремума можно разделить на два вида: те, в которых производная равна нулю (на рисунке 39.8 касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой), и те, в которых функция недифференцируема (см. рис. 39.9).

Рис. 39.8

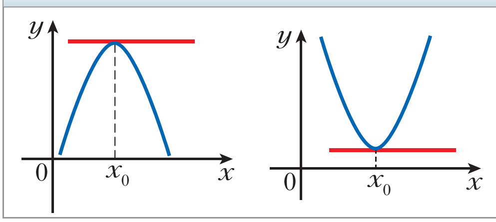
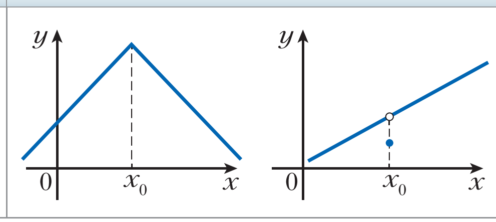


Рис. 39.9



На самом деле справедлива следующая теорема.

Теорема 39.1

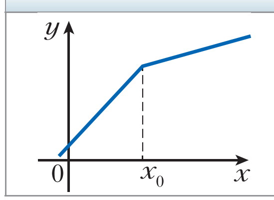
Если x_0 — точка экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.

Возникает вопрос: обязательно ли является точкой экстремума внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует?

Ответ на этот вопрос отрицательный.

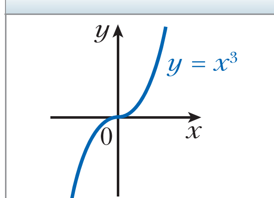
Например, на рисунке 39.10 изображён график функции, недифференцируемой в точке x_0. Однако точка x_0 не является точкой экстремума.

Рис. 39.10



Приведём ещё один пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем: $f'(x) = 3x^2$. Тогда $f'(0) = 0$. Однако точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции f (рис. 39.11).

Рис. 39.11



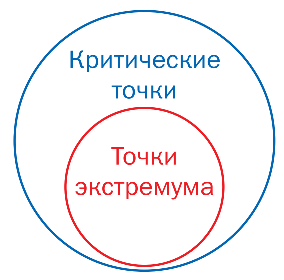
Эти примеры показывают, что теорема 39.1 даёт необходимое, но недостаточное условие существования экстремума в данной точке.

Определение

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

Например, точка $x_0 = 0$ является критической точкой функций $y = x^3$ и $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является критической точкой функции $y = \sin x$.

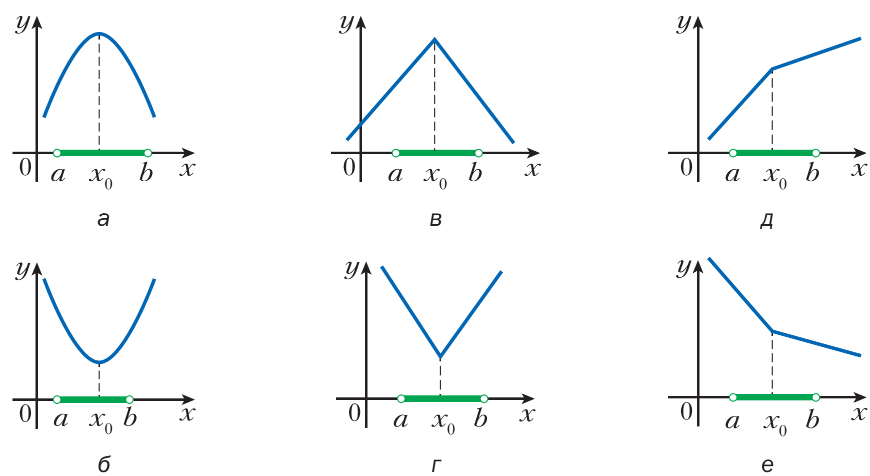
Рис. 39.12



Из сказанного выше следует, что *каждая точка экстремума функции является её критической точкой, но не каждая критическая точка является точкой экстремума*. Иными словами, *точки экстремума следует искать среди критических точек*. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 39.12.

На рисунке 39.13 изображены графики функций, для которых x_0 является критической точкой.

Рис. 39.13

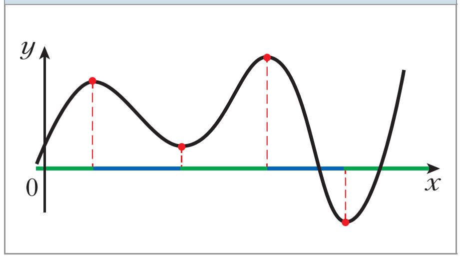


На рисунках 39.13, *а–г*, критическая точка x_0 является точкой экстремума, на рисунках 39.13, *д*, *е*, критическая точка x_0 не является точкой экстремума.

Наличие экстремума функции в точке x_0 связано с поведением функции в окрестности этой точки. Так, для функций, графики которых изображены на рисунках 39.13, *а–г*, имеем: функция **возрастает** (**убывает**) на промежутке $(a; x_0]$ и **убывает** (**возрастает**) на промежутке $[x_0; b)$.

Функции, графики которых изображены на рисунках 39.13, *д*, *е*, таким свойством не обладают: первая из них возрастает на каждом из промежутков $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$, вторая убывает на этих промежутках.

Рис. 39.14



Вообще, если область определения непрерывной функции разбита на конечное количество промежутков возрастания и убывания, то легко найти все точки экстремума (рис. 39.14).

Вы знаете, что с помощью производной можно находить промежутки возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Две теоремы, приведённые ниже, показывают, как с помощью производной можно находить точки экстремума функции.

Теорема 39.2
(признак точки максимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f (см. рис. 39.13, *а*)**.**

Теорема 39.3
(признак точки минимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f (см. рис. 39.13, *б*)**.**

Иногда удобно пользоваться упрощёнными формулировками этих двух теорем: *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*; *если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*.

Итак, для функции f точки экстремума можно искать по такой схеме:

1) Найти $f'(x)$.

2) Исследовать знак производной в окрестностях критических точек.

3) Пользуясь соответствующими теоремами, для каждой критической точки выяснить, является ли она точкой экстремума.

Пример. Найдите точки экстремума функции: 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = 2x^2 - x^4$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$; 4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$.

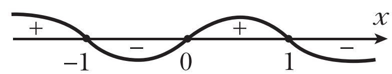
Решение. 1) Имеем: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Методом интервалов исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 39.15). Получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$.

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

Исследовав знак производной (рис. 39.16), получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ и $x_{max} = 1$.

Рис. 39.15

Рис. 39.16



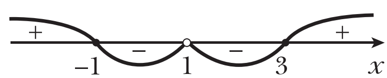
3) Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$.

Исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 39.17). Получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$.

Рис. 39.17



4) Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x + 2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x + 2)}{x} = \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

Если $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; если $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Следовательно, критическая точка $x = 2$ является точкой минимума, то есть $x_{min} = 2$. ◄

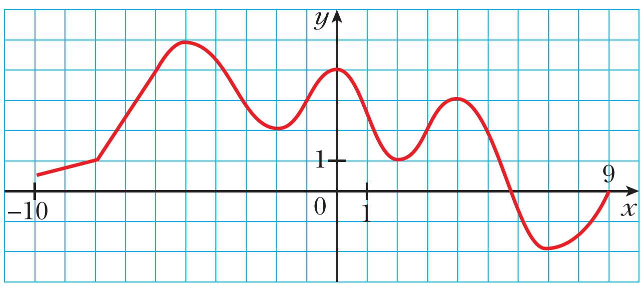
1. Какой промежуток называют окрестностью точки x_0?
2. Какую точку называют точкой максимума функции; точкой минимума функции?

3. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
4. Какую точку называют критической точкой функции?
5. Сформулируйте признак точки максимума; точки минимума.

Упражнения

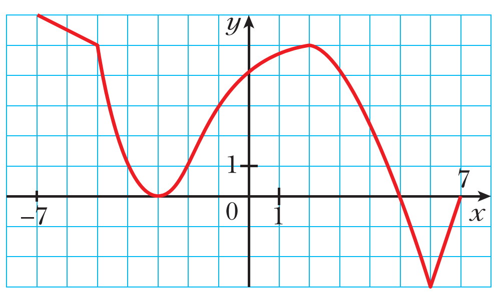
39.1. На рисунке 39.18 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-10; 9]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

Рис. 39.18



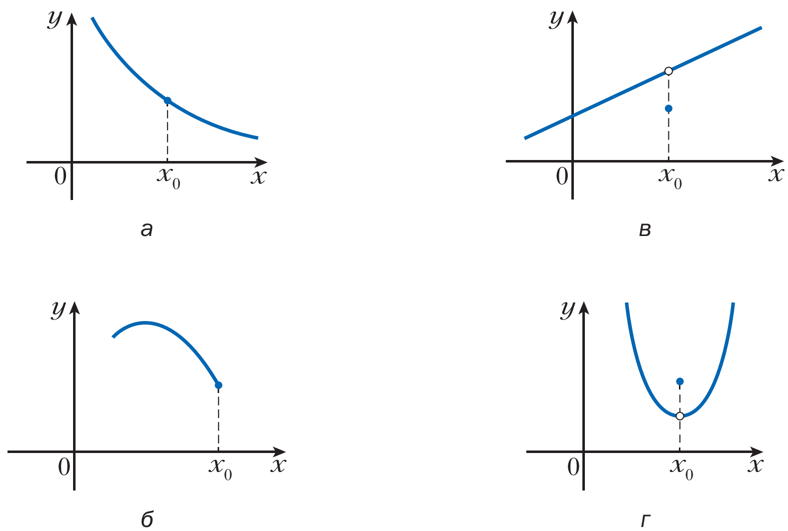
39.2. На рисунке 39.19 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-7; 7]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

Рис. 39.19



39.3. На рисунке 39.20 укажите график функции, для которой точка x_0 является точкой минимума.

Рис. 39.20

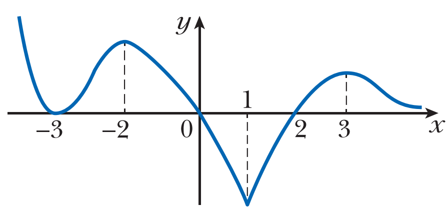


39.4. Имеет ли критические точки функция:

1) $f(x) = x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
3) $f(x) = 5$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

39.5. На рисунке 39.21 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Верно ли равенство:

Рис. 39.21



1) $f'(-3) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$;
3) $f'(0) = 0$;
4) $f'(1) = 0$;
5) $f'(2) = 0$;
6) $f'(3) = 0$?

39.6. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
6) $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

39.7. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;
6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

39.8. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве действительных чисел. На рисунке 39.22 изображён график её производной. Укажите точки максимума и минимума функции $y = f(x)$.

39.9. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 39.23 изображён график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?

Рис. 39.22

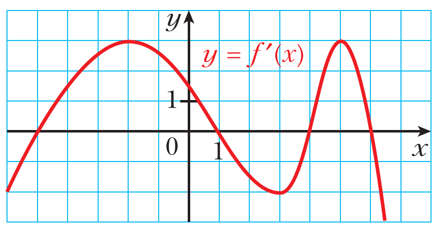
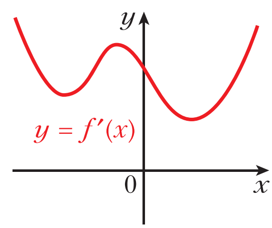


Рис. 39.23



39.10. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$;
2) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$;
3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

39.11. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$;
2) $f(x) = (x + 4)^4(x - 3)^3$.

39.12. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$;
2) $f(x) = \sin x - x$.

39.13. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$;
2) $f(x) = \cos x + x$.

39.14. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$;
5) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{1}{(x - 3)^2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;
8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

39.15. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$;
2) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$;
4) $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$;
5) $f(x) = \frac{1}{16 - x^2}$;
6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

39.16. Верно ли утверждение:

1) значение функции в точке максимума может быть меньше значения функции в точке минимума;
2) функция в точке экстремума может быть недифференцируемой;
3) если производная в некоторой точке равна нулю, то эта точка является точкой экстремума функции?

39.17. Верно ли утверждение:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю;
2) если функция в некоторой точке недифференцируема, то эта точка является точкой экстремума функции?

39.18. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$;
2) $f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}$.

39.19. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$;
2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}$.

39.20. При каких значениях a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет только одну критическую точку?

39.21. При каких значениях a функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$ имеет только одну критическую точку?

39.22. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$;
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;
2) $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$;
4) $f(x) = \dfrac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

39.23. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$;
2) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Готовимся к изучению новой темы

39.24. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на отрезке:

1) $[-1; 4]$;
2) $[-4; 1]$;
3) $[4; 5]$.

39.25. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на отрезке:

1) $[-5; -3]$;
2) $[-1; 0]$;
3) $[-11; -10]$.

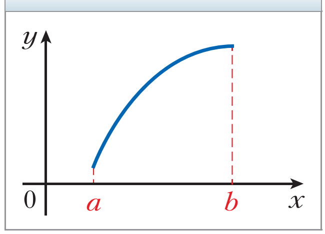
§ 40. Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции

Какое количество продукции должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль? Как, имея ограниченные ресурсы, выполнить производственное задание в кратчайшее время? Как организовать доставку товара на автомобиле по торговым точкам так, чтобы расход топлива был наименьшим?

Такие и подобные задачи на поиск наилучшего, или, как говорят, оптимального, решения занимают значительное место в практической деятельности человека.

Представим, что известна функция, которая описывает, например, зависимость прибыли предприятия от количества изготовленной продукции. Тогда задача сводится к поиску аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение.

Рис. 40.1



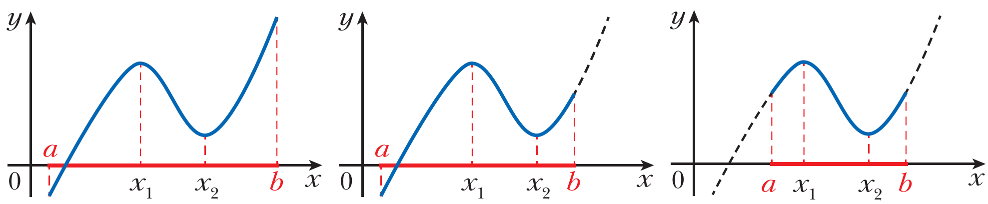
В этом параграфе мы выясним, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a; b]$. Ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Заметим, что точка, в которой функция принимает своё наименьшее значение, не обязательно является точкой минимума. Например, на рисунке 40.1 $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точек минимума функция f не имеет. Также точка минимума не обязательно является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение. На рисунке 40.2, a, точка x_2 — единственная точка минимума, а наименьшее значение $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$ достигается в точке a.

Аналогичное замечание относится к точкам максимума и точкам, в которых функция принимает наибольшее значение.

На рисунке 40.2 представлены разные случаи расположения точек экстремумов и точек, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Рис. 40.2



$$\min_{[a;\,b]} f(x) = f(a) \qquad \min_{[a;\,b]} f(x) = f(a) \qquad \min_{[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$$

$$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(b) \qquad \max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_1) \qquad \max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_1)$$

а — б — в

Здесь важно понять, что свойство функции иметь точку экстремума x_0 означает следующее: функция принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение по сравнению со значениями функции во всех точках некоторой, возможно, очень малой окрестности точки x_0. Поэтому если хотят подчеркнуть этот факт, то точки экстремума ещё называют **точками локального максимума** или **точками локального минимума** (от лат. *locus* — место).

Непрерывная на промежутке $[a;\,b]$ функция достигает на этом промежутке свои наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка, или в точках экстремума (см. рис. 40.2).

Тогда для такой функции поиск наибольшего и наименьшего значений на промежутке $[a;\,b]$ можно проводить, пользуясь следующей схемой:

1. Найти критические точки функции f, принадлежащие промежутку $[a;\,b]$.
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах рассматриваемого отрезка.
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Этот алгоритм можно реализовать только тогда, когда рассматриваемая функция f имеет конечное количество критических точек на промежутке $[a; b]$.

Отметим, что если определить, какие из критических точек являются точками экстремума, то количество точек, в которых следует искать значения функции, можно уменьшить. Однако выявление точек экстремума, как правило, требует большей вычислительной работы, чем поиск значений функции в критических точках.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на промежутке $[-2; 0]$.

Решение. Найдём критические точки данной функции. Имеем:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Теперь решим уравнение

$$12x^2 - 18x - 12 = 0. \text{ Отсюда}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция f имеет две критические точки, а промежутку $[-2; 0]$ принадлежит одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Ответ: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на промежутке $[0; \pi]$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x$. Найдём критические точки данной функции:

$$\sin 3x \sin x = 0;$$

$$\sin 3x = 0 \text{ или } \sin x = 0;$$

$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ или } x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, точки вида $x = \frac{\pi k}{3}$ являются критическими точками функции f. Из них промежутку $[0; \pi]$ принадлежат четыре точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Имеем:

$$f(0) = f(\pi) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким образом, $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$; $-3\sqrt{3}$. ◄

Пример 3. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго числа была наименьшей.

Решение. Пусть первое число равно x, тогда второе число равно $8 - x$. Из условия следует, что $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, определённую на промежутке $[0; 8]$, и найдём, при каком значении x она принимает наименьшее значение.

Имеем: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Найдём критические точки функции f. Для этого решим уравнение:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0. \text{ Отсюда}$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{8}{3}.$$

Среди найденных чисел промежутку $[0; 8]$ принадлежит только число 2. Имеем:

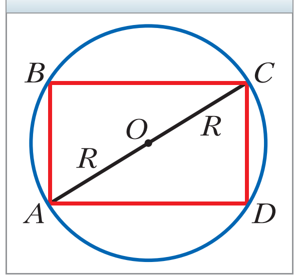
$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Следовательно, функция f принимает наименьшее значение при $x = 2$.

Ответ: $8 = 2 + 6$. ◄

Пример 4. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R, если площадь прямоугольника принимает наибольшее значение.

Рис. 40.3



Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность радиуса R (рис. 40.3). Пусть $AB = x$, тогда $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Отсюда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Из условия задачи следует, что значения переменной x удовлетворяют неравенству $0 < x < 2R$, то есть принадлежат промежутку $(0;\ 2R)$. Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на промежутке $(0;\ 2R)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0;\ 2R]$, и будем искать её наибольшее значение на промежутке $[0;\ 2R]$.

Найдём критические точки функции f:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (4R^2 - x^2)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

С учётом области определения функции f получаем, что эта функция имеет одну критическую точку $x = R\sqrt{2}$.

Имеем: $f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{[0;\,2R]} f(x) = f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$.

Отсюда получаем, что функция $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на промежутке $(0;\ 2R)$ принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$. Тогда $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Следовательно, среди прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $R\sqrt{2}$. ◄

Опишите, как найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке $[a;\ b]$.

Упражнения

40.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1;\ 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0;\ 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1;\ 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3;\ 0]$.

40.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0;\ 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2;\ 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2;\ 1]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1;\ 2]$.

40.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

40.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$;
3) $f(x) = (x - 1)^2(x + 5)^2$, $[-3; 2]$;
4) $f(x) = -x - \frac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

40.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$;
3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

40.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$.

40.7. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение куба одного из этих чисел на второе число было наибольшим.

40.8. Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение квадрата одного из этих чисел на удвоенное второе число было наибольшим.

40.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;
2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;
3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

40.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

40.11. Представьте число 180 в виде суммы трёх неотрицательных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение всех трёх слагаемых было наибольшим.

40.12. Представьте число 18 в виде суммы трёх неотрицательных чисел так, чтобы два из них относились как 8 : 3, а сумма кубов этих трёх чисел была наименьшей.

40.13. В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найдите наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, где BD — высота треугольника ABC.

40.14. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и острым углом 30° вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

40.15. В полукруг радиуса 20 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите стороны прямоугольника.

40.16. В полукруг радиуса 6 см вписан прямоугольник наибольшего периметра. Найдите стороны прямоугольника.

40.17. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$, а две другие — оси абсцисс. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

40.18. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$, а две другие — прямой $y = 9$. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

40.19. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Какой должна быть длина основания треугольника, чтобы его площадь принимала наибольшее возможное значение?

Готовимся к изучению новой темы

40.20. Начертите график какой-нибудь непрерывной функции такой, что: областью определения является промежуток $[-4; 3]$; областью значений является промежуток $[-5; 3]$; нули функции равны -2 и 2; функция убывает на каждом из промежутков $[-4; -1]$ и $[2; 3]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$.

40.21. Начертите график какой-нибудь дифференцируемой функции такой, что: областью определения является промежуток $[-3; 4]$; областью значений является промежуток $[-2; 3]$; нули функции равны -1 и 2; $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-3; 0)$ и $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(0; 2)$.

§ 41. Построение графиков функций

Когда в предыдущих классах вам приходилось строить графики, вы, как правило, поступали так: отмечали на координатной плоскости некоторое количество точек, принадлежащих графику, а затем соединяли их. Точность построения зависела от количества отмеченных точек.

На рисунке 41.1 изображено несколько точек, принадлежащих графику некоторой функции $y = f(x)$. Эти точки можно соединить по-разному, например так, как показано на рисунках 41.2 и 41.3.

Рис. 41.1

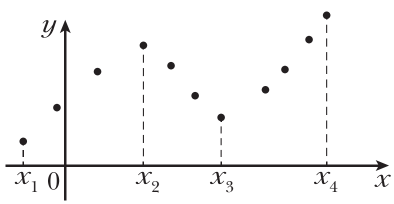
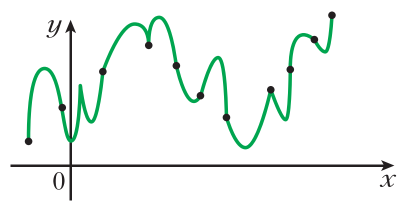


Рис. 41.2



Однако если знать, что функция f возрастает на каждом из промежутков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$, убывает на промежутке $[x_2; x_3]$ и является дифференцируемой, то, скорее всего, будет построен график, показанный на рисунке 41.4.

Рис. 41.3

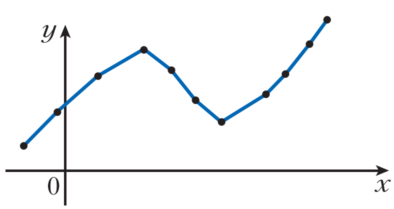
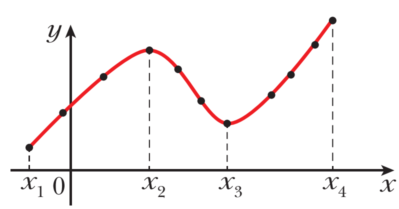


Рис. 41.4



Вы знаете, какими особенностями обладают графики чётной, нечётной, периодической функций и т. д. Вообще, чем больше свойств функции удаётся определить, тем точнее можно построить её график.

Исследование свойств функции будем проводить по такому плану:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на чётность.

3. Найти нули функции.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.

6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.

7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

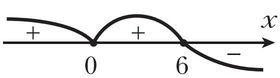
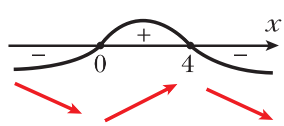
Заметим, что приведённый план исследования носит рекомендательный характер и не является постоянным и исчерпывающим. Важно при исследовании функции обнаружить такие её свойства, которые позволят корректно построить график.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Имеем: $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Отсюда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть функция $y = f(-x)$ не совпадает ни с функцией $y = f(x)$, ни с функцией $y = -f(x)$. Таким образом, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3–4. Имеем: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$. Числа 0 и 6 являются нулями функции f. Применив метод интервалов (рис. 41.5), находим промежутки знакопостоянства функции f, а именно: устанавливаем, что $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

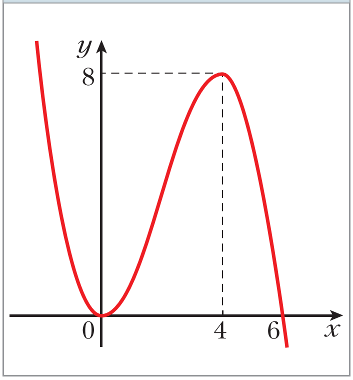
Рис. 41.5	Рис. 41.6
	

5–6. Имеем: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$.

Исследовав знак производной (рис. 41.6), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутке $[0; 4]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$. Поэтому $x_{max} = 4$, $x_{min} = 0$. Имеем: $f(4) = 8$, $f(0) = 0$.

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 41.7). ◄

Рис. 41.7



Пример 2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Область определения функции несимметрична относительно начала координат, следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Функция не имеет нулей.

4. Имеем: $f(x) = \frac{4}{x(x+4)}$. Отсюда $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 41.8).

5–6. Имеем: $f'(x) = \frac{(4)' \cdot (x^2 + 4x) - 4 \cdot (x^2 + 4x)'}{x^2(x+4)^2} = -\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2} = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}$.

Исследовав знак f' (рис. 41.9), приходим к выводу, что функция f убывает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; +\infty)$, возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -4)$ и $(-4; -2]$, $x_{max} = -2$, $f(-2) = -1$.

Рис. 41.8

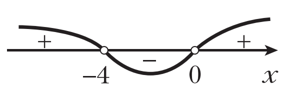
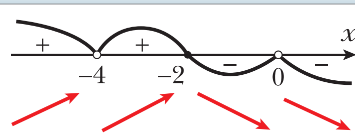


Рис. 41.9



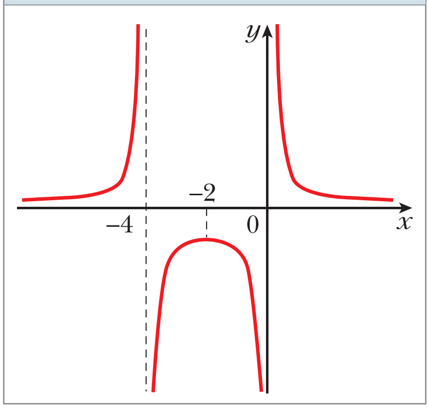
7. Заметим, что если значения аргумента x выбирать всё бóльшими и бóльшими, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ всё меньше и меньше отличаются от числа 0 и могут стать сколь угодно малы-

ми. Это свойство принято записывать так: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2 + 4x} = 0$ или так: $\dfrac{4}{x^2 + 4x} \to 0$ при $x \to +\infty$. В этом случае прямую $y = 0$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$. Аналогично можно установить, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

Если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 4x}$ становятся всё бо́льшими и бо́льшими и могут стать бо́льшими произвольного наперёд заданного положительного числа. В этом случае прямую $x = 0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю справа. Прямая $x = 0$ также является вертикальной асимптотой графика функции f, когда x стремится к нулю слева. Функция f имеет ещё одну вертикальную асимптоту — прямую $x = -4$, когда x стремится к -4 как слева, так и справа.

Учитывая полученные результаты, строим график функции f (рис. 41.10). ◄

Рис. 41.10



Опишите план исследования свойств функции.

Упражнения

41.1. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x^3$;
6) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
7) $f(x) = (x + 3)^2(x - 1)^2$.

41.2. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

41.3. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{4-x}{x+2}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$;
3) $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$;
4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$;
7) $f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2}$;
8) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$.

41.4. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x}$;
3) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
5) $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$;
6) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$.

Когда сделаны уроки

Вторая производная

Пусть материальная точка движется по закону $y = s(t)$ по координатной прямой. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t определяется по формуле

$$v(t) = s'(t).$$

Рассмотрим функцию $y = v(t)$. Её производную в момент времени t называют ускорением движения и обозначают $a(t)$, то есть

$$a(t) = v'(t).$$

Таким образом, функция ускорение движения — это производная функции скорость движения, которая, в свою очередь, является производной функции закон движения, то есть

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

В таких случаях говорят, что функция ускорение движения $y = a(t)$ является **второй производной функции** $y = s(t)$. Пишут:

$$a(t) = s''(t)$$

(запись $s''(t)$ читают: «эс два штриха от тэ»).

Например, если закон движения материальной точки задан формулой $s(t) = t^2 - 4t$, то имеем:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Мы получили, что материальная точка движется с постоянным ускорением. Как вы знаете из курса физики, такое движение называют равноускоренным.

Обобщим сказанное.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на некотором множестве M. Тогда её производная также является некоторой функцией, заданной на этом множестве. Если функция f' дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in M$, то производную функции f' в точке x_0 называют **второй производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $y''(x_0)$. Саму функцию f называют **дважды дифференцируемой в точке** x_0.

Функцию, которая числу x_0 ставит в соответствие число $f''(x_0)$, называют **второй производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f'' или y''.

Например, если $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Если функция f дважды дифференцируема в каждой точке множества M, то её называют **дважды дифференцируемой на множестве** M. Если функция f дважды дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дважды дифференцируемой**.

Вы знаете, что функцию характеризуют такие свойства, как чётность (нечётность), периодичность, возрастание (убывание) и т. д. Ещё одной важной характеристикой функции является выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Обратимся к примерам.

О функциях $y = x^2$, $y = |x|$ говорят, что они являются выпуклыми вниз (рис. 41.11), а функции $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ являются выпуклыми вверх

Рис. 41.11

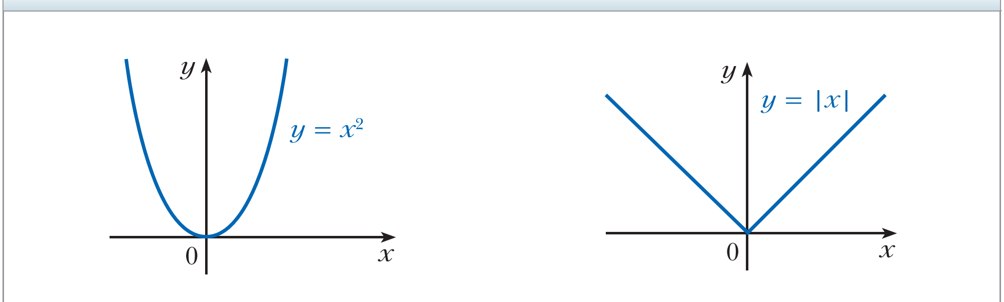


Рис. 41.12

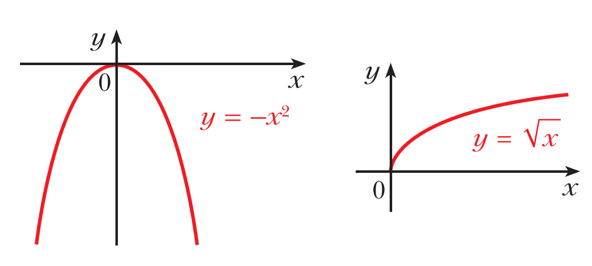
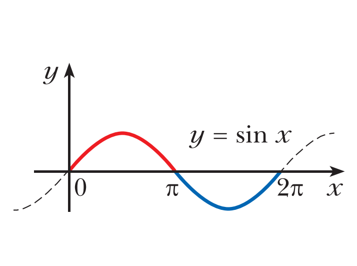


Рис. 41.13



(рис. 41.12). Функция $y = \sin x$ является выпуклой вверх на промежутке $[0; \pi]$ и выпуклой вниз на промежутке $[\pi; 2\pi]$ (рис. 41.13). Линейную функцию считают как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

Далее, изучая понятия выпуклости функции на промежутке I, ограничимся случаем, когда функция f дифференцируема[1] на этом промежутке.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Тогда в любой точке её графика с абсциссой $x \in I$ можно провести невертикальную касательную. Если при этом график функции на промежутке I расположен не выше любой такой касательной (рис. 41.14), то функцию f называют **выпуклой вверх на промежутке** I; если же график на промежутке I расположен не ниже любой такой касательной (рис. 41.15), то функцию f называют **выпуклой вниз на промежутке** I.

На рисунке 41.16 изображён график функции f, которая является выпуклой вниз на промежутке $[a; b]$. Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной увеличивается. Это означает, что функция f' возрастает на промежутке $[a; b]$.

Рис. 41.14

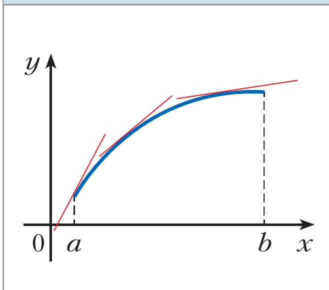


Рис. 41.15

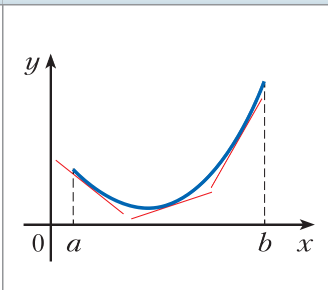
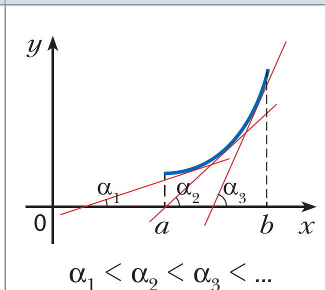


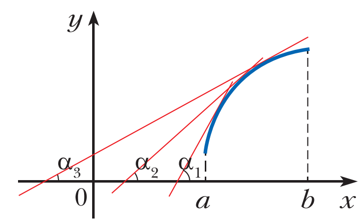
Рис. 41.16



[1] В высшей школе понятие выпуклости распространяют и на более широкие классы функций, например непрерывные.

Пусть функция f является выпуклой вверх на промежутке $[a; b]$ (рис. 41.17). Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной уменьшается. Это означает, что функция f' убывает на промежутке $[a; b]$.

Рис. 41.17



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > ...$

Эти примеры показывают, что характер выпуклости функции f на некотором промежутке I связан с возрастанием (убыванием) функции f' на этом промежутке.

Для дважды дифференцируемой на промежутке I функции f возрастание (убывание) функции f' определяется знаком второй производной функции f на промежутке I. Таким образом, характер выпуклости дважды дифференцируемой функции связан со знаком её второй производной.

Эту связь устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 1
(признак выпуклости функции вниз)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то функция f является выпуклой вниз на промежутке I.

Теорема 2
(признак выпуклости функции вверх)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \leqslant 0$, то функция f является выпуклой вверх на промежутке I.

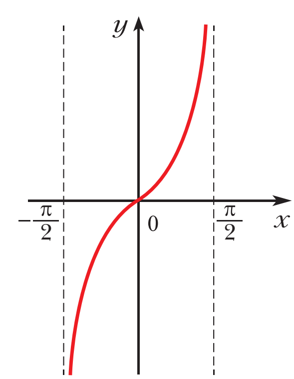
<u>**Пример.**</u> Исследуйте на выпуклость функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Неравенство $f''(x) \geqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Следова-

Рис. 41.18



тельно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вниз на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 41.18).

Неравенство $f''(x) \leqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вверх на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (см. рис. 41.18). ◄

Упражнения

1. Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin \frac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

2. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её ускорение в момент времени $t_0 = 2$ с.

3. Исследуйте на выпуклость функцию:

1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

4. Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ является выпуклой вниз на $\boldsymbol{R}$.

Когда сделаны уроки

Применение производной для решения уравнений и доказательства неравенств

В рассказе «Применение свойств функций» вы познакомились с приёмами решения уравнений и неравенств, основанными на свойствах функций. Использование производной существенно расширяет класс задач подобного рода. Продемонстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Решите уравнение $4x^3 - 9x^4 - \sqrt{1 - 3x} + 15 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^3 - 9x^4 - \sqrt{1 - 3x} + 15$, $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Для всех $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем: $f'(x) = 12x^2 - 36x^3 + \frac{3}{2\sqrt{1 - 3x}} =$

$= 12x^2(1 - 3x) + \dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$. Очевидно, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$, то есть функция f возрастает на промежутке $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = \dfrac{1}{3}$, то эта функция возрастает на $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$. Тогда функция f принимает каждое своё значение только один раз, а следовательно, уравнение $f(x) = 0$ не может иметь более одного корня.

Нетрудно заметить, что $f(-1) = 0$. Тогда $x = -1$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: -1. ◀

Пример 2. Докажите, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 + 4x + 3 > 2x^5$.

Решение. Докажем, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 - 2x^5 + 4x + 3 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^9 - 2x^5 + 4x + 3$. Так как $f(-1) = 0$, то доказываемое неравенство можно представить в виде $f(x) > f(-1)$, где $x \in (-1; +\infty)$. Имеем: $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 4$. Поскольку квадратный трёхчлен $9t^2 - 10t + 4$ имеет отрицательный дискриминант, то неравенство $9t^2 - 10t + 4 > 0$ выполняется для всех $t \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, $f'(x) > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому функция f возрастающая. Отсюда для любого $x \in (-1; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > f(-1)$. ◀

Пример 3. Докажите, что для всех $x > 0$ выполняется неравенство $x > \sin x$.

Решение. При $x \geqslant 1$ доказываемое неравенство очевидно.

Пусть $0 < x < 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \sin x$. Поскольку $f(0) = 0$, то достаточно доказать, что $f(x) > f(0)$ при $0 < x < 1$. Имеем: $f'(x) = 1 - \cos x$. Так как при всех $0 < x < 1$ выполняется неравенство $1 - \cos x > 0$, то $f'(x) > 0$ при всех $0 < x < 1$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(0; 1)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = 0$, то эта функция возрастает на промежутке $[0; 1)$. Следовательно, при $0 < x < 1$ выполняется неравенство $f(x) > f(0)$. ◀

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = \cos 2y - \cos 2x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Решение. Запишем: $\begin{cases} 2x^2 + \cos 2x = 2y^2 + \cos 2y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 + \cos 2t$. Тогда первое уравнение полученной системы можно представить в виде $f(x) = f(y)$.

Из второго уравнения системы следует, что $x > 0$ и $y > 0$. Поэтому будем рассматривать функцию f на множестве $(0; +\infty)$.

Имеем: $f'(t) = 4t - 2\sin 2t = 2(2t - \sin 2t)$.

Из утверждения, доказанного в примере 3, следует, что $2t > \sin 2t$ при $t > 0$. Тогда $f'(t) > 0$ при всех $t \in (0; +\infty)$. Следовательно, функция f возрастает на $(0; +\infty)$. Поэтому из равенства $f(x) = f(y)$ получаем, что $x = y$.

Имеем: $\begin{cases} x = y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}, \\ y = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$. ◄

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$, $D(f) = [2; 4]$.

Для всех $x \in (2; 4)$ имеем: $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}$.

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Запишем: $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0$. Легко установить, что это уравнение имеет единственный корень $x = 3$. Получили, что функция f на промежутке $[2; 4]$ имеет единственную критическую точку $x = 3$.

Поскольку функция f непрерывна на промежутке $[2; 4]$, то её наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$.

Имеем: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Следовательно, $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2$, причём наибольшее значение функция f принимает только при $x = 3$.

Так как нам надо решить уравнение $f(x) = 2$, то получаем, что $x = 3$ является его единственным корнем.

Ответ: 3. ◄

Упражнения

1. Докажите неравенство $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Докажите неравенство $x < \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение $3x^7 + x + 7 = \sqrt{1 - 8x}$.

4. Решите уравнение $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

5. Решите уравнение $x^3 + 2x = \sin x$.

6. Решите неравенство $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

7. Решите неравенство $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

10. Решите уравнение $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3} = x^2 - 8x + 18$.

11. Решите уравнение $\sqrt{x + 7} + \sqrt{1 - x} = x^2 + 6x + 13$.

Когда сделаны уроки

«Алеф-17»

«Алеф-17». Читая такое название рассказа, в мыслях могут возникнуть образы из очередного блокбастера — космического корабля, мчащегося к неизвестной планете, или загадочного вируса, атакующего Землю. Однако вы вряд ли догадаетесь, что этот знак (см. рис.) связан с... московской математической школой Н.Н. Лузина — абсолютно уникальным явлением в истории науки.

Н.Н. Лузин

В начале XX века математическая жизнь в Московском университете была довольно размеренной и академичной. Заслуженный профессор МГУ В.М. Тихомиров отмечает, что в то время в университете работал всего один математический семинар, посвящённый главным образом научным интересам его руководителя Д.Ф. Егорова. И вдруг, буквально за несколько лет, молодой математик Н.Н. Лузин, ученик Д.Ф. Егорова, совершенно изменяет ритм университетской жизни. Количество математических семинаров начало быстро расти и со временем стало исчисляться десятками, а потом перевалило за сотню.

За короткий промежуток времени Н.Н. Лузин собрал вокруг себя невероятное количество молодых математиков, многие из которых стали учёными с мировым именем и создали собственные научные школы. Ни в одном другом научном центре мира того времени не было подобного соцветия выдающихся математиков! Когда в середине 30-х годов XX века одного известного американского учёного попросили назвать крупнейших молодых математиков современности, он назвал четырёх московских учёных: А.О. Гельфонда, А.Н. Колмогорова, Л.С. Понтрягина и Л.Г. Шнирельмана.

К 100-летнему юбилею со дня рождения Н.Н. Лузина на механико-математическом факультете было создано «генеалогическое» древо его учеников, ставших докторами наук (см. рис.). Во всемирной компьютерной базе данных «Математическая генеалогия» Н.Н. Лузин на сегодняшний день имеет около 5000 научных потомков!

Лузин решительно реформировал методы подготовки молодых математиков. Даже начинающим студентам предлагалось сразу браться за решение открытых математических проблем. Целью ставилось получение самостоятельных научных результатов, развитие способности видеть новые задачи, искать нестандартные пути их решения. Говорят, что существовало негласное правило: если у аспиранта, сдающего экзамен, уже был самостоятельный научный результат, то вопросы задавали только по этому результату. «Мы все стремились вместо изучения толстой монографии в 200–300 страниц придумать новую постановку задачи», — вспоминает академик М.А. Лаврентьев.

Атмосфере школы Лузина были присущи юмор, ирония и театральность. Например, Лузин мог закончить лекцию словами: «теперь перед нашим интеллектуальным взором открывается зрелище необычайной красоты». Среди членов школы была введена иерархия по их достижениям с помощью так называемых «алефов» – символов на основе первой буквы $\aleph$ некоторых алфавитов (еврейского, финикийского, арабского и др., читается «алеф»). Дело в том, что в математике символы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... используют для классификации множеств по их мощности. Вступающий в ряды учеников Лузина получал звание $\aleph_0$ – «алеф-нуль». За каждое достижение к индексу добавлялась единица. Всемирно известные учёные П.С. Александров и П.С. Урысон получили высокие звания $\aleph_5$ – «алеф-5», а символ $\aleph_{17}$ – «алеф-17» стал гербом школы.

Математическая школа Лузина стала ещё одним ярким подтверждением глубоких математических традиций в России. Поэтому все, кто любит и увлекается этой наукой, могут смело выбирать замечательную профессию математика.

Итоги главы 5

Непрерывность функции

Функция является непрерывной в точке, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке.

Если функция является непрерывной в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она непрерывна на этом множестве.

Функцию, непрерывную на своей области определения, называют непрерывной.

Приращение аргумента x в точке x_0

$\Delta x = x - x_0$

Приращение функции f в точке x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ или $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Производная функции

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной

Угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен значению производной функции f в точке x_0.

Механический смысл производной

Если $y = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то её мгновенная скорость в момент времени t_0 равна значению производной функции $y = s(t)$ в точке t_0.

Дифференцируемость функции

Если функция имеет производную в некоторой точке, то её называют дифференцируемой в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она дифференцируема на этом множестве.

Уравнение касательной, проведённой к графику f в точке с абсциссой x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Признак постоянства функции

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.

Признак возрастания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Признак убывания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Окрестность точки

Промежуток $(a; b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Точки экстремума функции

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.

Необходимое условие существования экстремума

Если x_0 является точкой экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.

Критические точки функции

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

Признаки точек максимума и минимума

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех

$x \in (a;\ x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a;\ x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

План исследования свойств функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность.
3. Найти нули функции.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).