Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №59»

Дзержинского района города Новосибирска

Работу выполнил:

учитель математики Шахов Денис Эдуардович

Контактный телефон: 89134597618

Электронная почта: shakhovdenis.1993@yandex.ru

**ОГЭ по математике: задание №21**

 Данная работа представляет собой подробный разбор различных типов задач, предлагаемых на ОГЭ в качестве задания №21. Этот разбор подразумевает приведение формулировки, подробное решение и методические комментарии. Практика показывает, что данное задание во второй части экзаменационной работы оказывается наиболее простым даже для учащихся среднего уровня подготовки.

Помимо разбора задач, предлагаемых в официальных сборниках по подготовке к ЕГЭ и на сайте ФИПИ, приводятся авторские дидактические материалы (в шести вариантах), рассчитанные на формирование у учащихся устойчивых навыков по решению задач данного типа. Ко всем задачам даны ответы. Уровень сложности первых пяти вариантов соответствует задачам, предлагаемым на ОГЭ по математике. Шестой вариант сложнее предыдущих, поэтому он может быть предложен наиболее сильным учащимся, например, для домашней самостоятельной работы, в виде бонусного задания на контрольной работе и т.д.

**Типы задач, предлагаемых в задании №21 ОГЭ по математике**

В большинстве своём задание №21 подразумевает решение:

**1) уравнения (системы уравнений);**

**2) неравенства.**

Предлагаемые уравнения и неравенства следует отнести к заданиям повышенной трудности, так как в каждом из них имеется «математическая ловушка», а именно: либо задача решается специфическим методом (стандартный метод приводит к излишней громоздкости), либо нужно проявить аккуратность при выписывании ответа (этап отбора корней уравнения, исключение отдельных точек в решении неравенства).

Помимо этого встречается задание на сокращение дроби. Это сокращение предполагает:

**3) преобразование выражений с использованием свойств степени.**

 Наконец, встречается задание олимпиадного характера:

**4) работа с линейными комбинациями переменных.**

Теперь перейдем к подробному рассмотрению каждого из четырёх блоков.

**Решение уравнений и их систем**

В данном блоке можно встретить множество разнообразных заданий. Наиболее простым и доступным для восприятия учащимися является следующее:

1) Решить уравнение

**Решение с методическими комментариями**

Перенеся все слагаемые в левую часть уравнения, получим:

Квадратные корни в силу противоположности уничтожаются, остаётся квадратное уравнение:

корнями которого являются числа и . Принципиальный момент: корень является посторонним, так как при подстановке его ***в первоначальное уравнение*** получим квадратный корень из отрицательного числа, чего быть не должно. Корень подходит, в чём убеждаемся непосредственной проверкой.

Заметим, что эта математическая ловушка срабатывает практически всегда – учащиеся записывают в ответ оба корня, что приводит к потере половины баллов на ОГЭ. Преодолеть эту трудность можно двумя стандартными путями:

1) сразу найти ОДЗ неизвестной (в данном случае имеем ). Отыскав корни, проверяем, входят ли они в найденный промежуток;

2) осуществить проверку, подставив найденные корни ***в первоначальное уравнение***. Слово «***первоначальное***» является ключевым, так как, подставив найденные корни в преобразованное (квадратное) уравнение, учащийся не сможет установить тот факт, что один из корней является посторонним.

 Отметим, что учащиеся должны понимать следующий факт: такие преобразования уравнения как сокращение дробей и приведение подобных слагаемых могут привести (не всегда) к расширению ОДЗ неизвестной. Поэтому нужно действовать одним из двух способов, о которых говорилось выше.

**Ответ:**

2) Решить уравнение

**Решение с методическими комментариями**

С точки зрения рационального подхода, самой грубой ошибкой является раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых. Во-первых, не все образовательные программы по математике предусматривают изучение темы «Бином Ньютона», поэтому учащиеся не могут возвести разность в четвёртую степень. Во-вторых, даже при успешном раскрытии скобок и последующих верных преобразованиях ученик получит общее уравнение четвёртой степени, методы решения которого в школе не изучаются.

В этой связи можно заметить, что четвёртая степень это квадрат квадрата, поэтому уравнение можно переписать так:

Видим, что выражение повторяется дважды, причём больше неизвестная нигде не встречается. Следовательно, можно выполнить замену Тогда уравнение примет вид:

Перенеся все слагаемые влево, получим квадратное уравнение, корнями которого являются числа и . Выписывание этих двух чисел в ответ – одна из распространённых ошибок; учащиеся забывают о том, что найдены значения неизвестной , а не . Поэтому следующим этапом решения является возвращение к неизвестной . Необходимо вспомнить, какое выражение обозначалось буквой , и это выражение приравнять к (первый случай) и к (второй случай).

***1 случай.*** *.* Это уравнение можно дорешать двумя способами:

1) если квадрат величины равен 5, то сама эта величина равна либо , либо . Тогда либо , либо

2) возвести левую часть в квадрат, перенести всё влево и решить полученное квадратное уравнение.

***2 случай.*** *.* Это уравнение не имеет действительных корней, так как квадрат любой величины неотрицателен.

**Ответ:** ,

3) Решить уравнение

**Решение с методическими комментариями**

Очевидно, что возведение в квадрат приведёт к громоздким преобразованиям (в обязательной программе по математике отсутствует формула кроме этого, ученики не готовы к решению общего уравнения четвёртой степени). Учащиеся должны вспомнить тот факт, что квадрат любого число неотрицателен. Далее учитель подчёркивает специфическую структуру уравнения – сумма квадратов двух величин равна нулю. Такое возможно только в том случае, когда обе величины (одновременно) равны нулю. Так как это выполняется одновременно, получим систему уравнений:

 Оба уравнения дорешиваются стандартно (первое – неполное квадратное, второе – полное квадратное). Корни первого уравнения: и . Корни второго уравнения: и . Решением системы является число (так как оно является корнем и первого уравнения, и второго).

***Замечание:*** первое уравнение системы целесообразно решать путём разложения левой части на множители (по формуле разности квадратов):

Выбор этого способа обусловлен тем, что, решая уравнение путём приведения к виду

,

подавляющее большинство учащихся записывает только один ответ, а именно число , то есть отрицательный корень уравнения упускается. Видим, что первый путь решения автоматически исключает такую ошибку.

**Ответ:**

4) Решить уравнение

**Решение с методическими комментариями**

По ранее указанным причинам выполнять возведение в квадрат и преобразовывать полученное уравнение нецелесообразно. Здесь опять следует заметить, что четвёртую степень можно рассматривать как квадрат квадрата. Затем применяется формула разности квадратов. Имеем:

Произведение равно нулю только в том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому имеет место совокупность (полезно напомнить ученикам, что система это «И», а совокупность это «ИЛИ»):

Второе уравнение не имеет действительных корней (в силу отрицательности дискриминанта), корнями первого уравнения являются числа и .

Этот способ наиболее стандартный. Однако сильным учащимся можно предложить и другие подходы к решению.

***Второй способ решения.*** Приведя уравнение к виду , учитель замечает его структуру – квадрат одной величины равен квадрату другой величины. Натолкнуть учащихся на идею решения можно, задав вопрос: «В каком случае квадраты двух величин совпадают?» (когда эти две величины либо равны, либо противоположны). Отсюда получается совокупность:

Дальнейший ход решения очевиден.

***Третий способ решения.*** Опять приведём исходное уравнение к виду . Две неотрицательные величины равны, а следовательно, квадратные корни из этих величин тоже равны. Поэтому, извлекая из обеих частей уравнения квадратный корень, получим:

Снова получается совокупность (точнее, совокупность систем):

Решив квадратное уравнение (и одно, и другое), необходимо отобрать корни (то есть, выбрать тот (те), который(-ые) входит(-ют) в заданный промежуток).

**Ответ:**

5) Решить уравнение

**Решение с методическими комментариями**

Заметим, что данное уравнение можно решить по алгоритму, стандартному для дробно-рациональных уравнений – в данном случае излишне громоздких преобразований не получится. Однако, переписав уравнение в виде

можно заметить, что выражение повторяется дважды, и неизвестная больше в уравнении не встречается. Значит, можно провести замену

В таком случае уравнение примет вид

Корнями этого уравнения являются числа и . Теперь следует вернуться к неизвестной (получим совокупность):

Решив эту совокупность, найдём значения неизвестной .

***Замечание:*** многие учащиеся используют замену

Эта замена действительно имеет место, но, используя её, не удастся избавиться от дробей. В итоге (после надлежащих преобразований) получится дробно-рациональное уравнение. В этой связи стоит полагать, что предложенная выше замена гораздо более рациональна, хотя усмотреть её несколько труднее.

**Ответ:**

6) Решить систему уравнений

**Решение с методическими комментариями**

Это система уравнений второй степени, решение которой выполняется по стандартному алгоритму. В данном случае удобен способ подстановки, так как неизвестная уже выражена через неизвестную . Подставив (в первое уравнение) вместо неизвестной выражение , перенеся всё в левую часть и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение:

Корнями этого уравнения являются числа и . Отыскав значения неизвестной , можно найти соответствующие значения неизвестной . Для этого подставим в любое уравнение (например, во второе) вместо неизвестной соответствующие значения. Получим два решения системы:

***Замечание:*** 1) Способ сложения для решения данной системы, очевидно, нецелесообразен, но также имеет место быть; 2) Можно рассуждать и по-другому. Так как правые части двух равенств совпадают, то и левые части тоже совпадут. Дальнейшее решение полностью повторяет вышеприведённое.

**Ответ:**

7) Решить систему уравнений

**Решение с методическими комментариями**

Сначала желательно обратить внимание учащихся на левые части уравнений, а именно, на пропорциональность коэффициентов. Можно заметить, что, домножая обе части первого уравнения на 2, получим систему:

Таким образом, левые части двух равенств совпали. Следовательно, должны совпасть и правые части. Получим уравнение , откуда легко найти . Отыскав значение неизвестной , можно найти соответствующие значения неизвестной . Для этого подставим в любое уравнение (например, в первое) вместо неизвестной соответствующее значение. Получим два решения системы:

***Замечание:*** 1) строго говоря, в данной системе можно использовать и способ подстановки (выражать при этом придётся не неизвестную, а её квадрат), но это абсолютно не рационально, так как повлечёт ряд преобразованй.

2) стоит также оговорить весьма популярную ошибку многих учеников. Это ошибка, вызванная непониманием смысла фразы «выразить одну неизвестную через другую». Заключается она в том, что одна и та же неизвестная встречается и в левой части равенства, и в правой. Например, дано равенство . Из него следует выразить одну из букв. Наиболее частый неправильный ответ: Первое условие (в левой части неизвестная в первой степени и с коэффициентом 1) выполнено, а второе (***ключевое*** – в правой части эта неизвестная отсутствует) – нет.

**Ответ:**

**Решение неравенств**

Здесь можно выделить два типа неравенств: неравенство, сводящееся к квадратному и неравенство, решаемое после надлежащих преобразований методом интервалов.

1) Решить неравенство

**Решение с методическими комментариями**

Прежде чем начинать решение этого неравенства, полезно вспомнить с учащимися следующие факты: 1) дробная черта символизирует деление; 2) частное двух чисел с одинаковыми знаками положительно, а частное двух чисел с разными знаками отрицательно. Далее, обратим внимание на то, что числитель дроби всегда отличен от нуля. Следовательно, дробь **не может быть равна нулю**, то есть, она может быть только **положительной**. Для этого знаменатель обязан быть отрицательным (так как частное отрицательных чисел положительно). После приведённой цепочки рассуждений исходное неравенство заменяем на неравенство Здесь можно предложить два способа решения.

***Стандартный способ.*** Раскрывая квадрат суммы по формуле и приводя подобные слагаемые, получим неравенство второй степени с одной переменной: Корни соответствующего квадратного уравнения: Изобразим эскиз параболы, являющейся графиком квадратного трёхчлена, фигурирующего в неравенстве.

Ветви параболы направлены вверх, так как старший коэффициент квадратного трёхчлена положительный. Остаётся для наглядности заштриховать искомый промежуток и выписать ответ.

***Способ для сильных учащихся.*** Полученное неравенство можно переписать в виде Далее из обеих частей неравенства извлекается квадратный корень: Отсутствие знака модуля при таком переходе – наиболее распространённая ошибка, которая приводит к потере половины решений. Это неравенство эквивалентно следующей системе:

**Ответ:**

2) Решить неравенство

**Решение с методическими комментариями**

Сразу же необходимо обратить внимание учащихся на грубую ошибку, которая часто допускается – сокращение обеих частей неравенства на выражение . Вместо этого нужно всё перенести в левую часть неравенства и вынести это выражение за скобки. Имеем:

Затем удобно воспользоваться методом интервалов:

***Замечание.*** Стоит напомнить ученикам, что в методе интервалов принято отмечать на координатной прямой «то, что отнимается от ». В этой связи делается акцент на работе с выражением, стоящим во вторых скобках. Даже после правильного разложения на множители некоторые учащиеся отмечают на координатной прямой точку, что неверно.

**Ответ:**

**Сокращение дробей**

Сократить дробь

**Решение с методическими комментариями**

Несмотря на разнообразие способов решения подобных задач, рекомендуется действовать следующим образом. Число представить как произведение степеней чисел и (единообразный подход во избежание путаницы). Далее используются свойства степени с натуральным показателем.

Необходимо требовать от учащихся подробного решения такого рода задач; особый акцент ставится на постановке скобок при вычитании показателей, так как их отсутствие приводит к неверному ответу.

**Ответ:** 48.

**Задача олимпиадного характера**

Известно,что

Найти значение выражения .

**Решение с методическими комментариями**

Принципиальным моментом в решении является то, что значения и находить не требуется (более того, это невозможно в силу бесконечности вариантов). Нужно вспомнить о том, что дробная черта символизирует деление. Следовательно, делимое, делитель, частное. Выразим делитель, раскроем скобки, перенесём всё вправо и приведём подобные слагаемые:

Теперь заметим, что выражение, значение которого необходимо найти, легко можно выразить через выражение, значение которого равно нулю:

**Дидактический материал для закрепления навыков**

**1 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения:

11) Найти значение выражения , если известно, что

**2 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения:

11) Найти значение выражения , если известно, что

**3 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения:

11) Найти значение выражения , если известно, что

**4 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения:

11) Найти значение выражения , если известно, что

**5 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения:

11) Найти значение выражения , если известно, что

**6 вариант**

Решить уравнение:

Решить систему уравнений:

Решить неравенство:

10) Найти значение выражения при :

11) 3 пирожка и 2 бублика стоит 100 рублей. 4 пирожка и 1 бублик стоит 140 рублей. Сколько стоит 5 пирожков и 5 бубликов?

**Таблица ответов**

|  |  |
| --- | --- |
| **Номер задания** | **Ответ** |
| 1 вариант  | 2 вариант | 3 вариант | 4 вариант | 5 вариант | 6 вариант |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| 5 |   |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |
| 7 | (1;1), (1;-1) | (2;1), (-2;1) | (2;2), (-2;2) | (3;1), (-3;1) | (1;-3), (-1;-3) | (2;1), (-1;-2) |
| 8 |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |

**Литература**

1) Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. С.А. Теляовского. – М.: Просвещение, 2011. – 271 с.: ил.

2) ОГЭ 2018. Математика. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ОГЭ / под ред. И.В. Ященко – М.: Экзамен, 2018. -303 с.

3) Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 класс/ Л.В. Кузнецова и др. – М.: Дрофа, 1996. – 144 с.: ил.

4) Я сдам ОГЭ! Модульный курс. Математика. Практикум и диагностика. / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. – М.: Просвещение, 2017, -287 с.: ил.

5) www / fipi.ru