глава

5 Рациональные выражения

- В этой главе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби, познакомитесь с уравнениями, содержащими такие дроби.
- Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в то же количество раз.

§ 34 Рациональные дроби

В главе 2 были рассмотрены целые выражения, т. е. такие, которые составлены из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $x^n - y^n$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y, 7.

В этой главе рассмотрим **дробные выражения**.

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведём примеры дробных выражений: $2x + \frac{a}{b}$; $(x - y) : (x + y)$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; $\frac{5}{x}$.

Объединением множеств целых и дробных выражений является множество **рациональных выражений**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль*.

Например, выражение $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, т. е. числового значения этого выражения при $a = 1$ не существует. При всех других значениях a это выражение имеет смысл.

Определение

Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет числовое значение.

Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.

Например, в рассмотренном выше примере областью определения выражения является множество всех чисел, кроме $a = 1$.

Подмножеством множества рациональных выражений является множество **рациональных дробей**. Это дроби, числителями и знаменателями которых являются многочлены[1]. Так, рациональные выражения $\frac{x}{7}$; $\frac{x^2 - 2xy}{x + y}$; $\frac{12}{a}$; $\frac{a + b}{5}$ являются примерами рациональных дробей.

Заметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, т. е. многочленом, тождественно равным нулю.

Схема, изображённая на рисунке 34.1, иллюстрирует связь между понятиями, рассмотренными в этом параграфе.

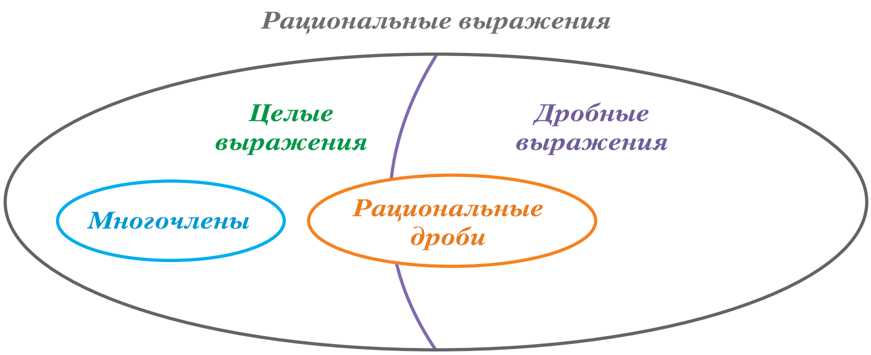


Рис. **34.1**

Пример. Найдите область определения выражения $\frac{1}{x} + \frac{3}{x - 5}$.

Решение. Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 0$, а дробь $\frac{3}{x - 5}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 5$.

[1] Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов.

Следовательно, областью определения выражения является множество всех чисел, кроме $x = 0$ и $x = 5$. ■

1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Какое множество является объединением множеств целых и дробных выражений?
3. Что называют областью определения выражения?
4. Опишите, что представляет собой множество рациональных дробей.
5. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

Упражнения

34.1. Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a - \frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$, $\frac{m^2 - 3mn}{18}$ являются:

1) целыми выражениями; 2) дробными выражениями; 3) рациональными дробями?

34.2. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{x-5}{9}$;
2) $\frac{9}{x-5}$;
3) $\frac{1}{x^2+4}$;
4) $\frac{5}{x^2-4}$;
5) $\frac{5}{|x|-4}$;
6) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$;
7) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
8) $\frac{x}{|x|+1}$;
9) $\frac{7}{x^3-25x}$.

34.3. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$.

34.4. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$;
2) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;
3) $y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$;
4) $y = \frac{9}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}}$;
5) $y = \frac{2}{|x| + x}$;
6) $y = \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x}}$.

34.5. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x}{x-\dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{x+2}{|x|-x}+\dfrac{1}{x+1}$; 3) $\dfrac{1}{x^2-\dfrac{1}{x}}$?

34.6. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\dfrac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное;

2) $\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ положительное;

3) $\dfrac{1}{2x-x^2-2}$ отрицательное;

4) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x+1}$ неотрицательное.

34.7. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\dfrac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;

2) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное;

3) $\dfrac{x^4+4x^2+4}{x^2-14x+49}$ положительное;

4) $\dfrac{1}{x-|x|}$ отрицательное.

34.8. Известно, что $5x-15y=1$. Найдите значение выражения:

1) $x-3y$;

2) $\dfrac{7}{2x-6y}$;

3) $\dfrac{18y-6x}{11}$;

4) $\dfrac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

34.9. Известно, что $4a+8b=10$. Найдите значение выражения:

1) $2b+a$; 2) $\dfrac{5}{a+2b}$; 3) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b+5}$.

Упражнения для повторения

34.10. В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 карандашей — красные, 16 карандашей — синие, а остальные — зелёные. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

34.11. Благодаря мероприятиям по экономии электроэнергии за первый месяц её расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

34.12. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта B в пункт A со скоростью 70 км/ч другой дорогой, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль затратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта A в пункт B. За какое время он доехал из пункта A в пункт B?

§ 35 Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях a.

Равенство $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях a. При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют числового значения.

Уточним принятые в главе 2 определения тождества и тождественно равных выражений.

Определение

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Определение

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Например, равенство $\frac{a - 2}{a - 2} = 1$ является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях a, т. е. при всех a, кроме $a = 2$.

В главе 2 рассматривались тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, где a, b и m — некоторые числа, причём $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения.

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

где A, B и C — многочлены, причём многочлены B и C ненулевые.

Согласно этому свойству выражение $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можно заменить на тождественно равную дробь $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель C.

Пример 1. Сократите дробь:

1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x + 15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y}$.

Решение.

1) Одночлены $6a^3b^2$ и $24a^2b^4$ имеют общий множитель $6a^2b^2$. Получаем:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x + 15y}{3x} = \frac{3(x + 5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x + 5y)}{3x} = \frac{x + 5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель $y + 2$, получаем:

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y + 2)^2}{y(y + 2)} = \frac{y + 2}{y}. \blacksquare$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, т. е.

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

Пример 2. Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}. \blacksquare$$

Пример 3. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ и $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ и $\frac{6}{a^2+6a}$.

Решение.

1) Произведение знаменателей данных дробей, равное $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$, можно принять за их общий знаменатель. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен $18a^4b^6$, полученный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 данных знаменателей, а каждая из переменных a и b взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Так как $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем для дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, получаем, что дополнительным множителем для дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ является одночлен $3b^3$. Следовательно,

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для нахождения общего знаменателя рациональных дробей целесообразно предварительно разложить их знаменатели на множители:

$a^2 - 36 = (a+6)(a-6)$, $a^2 + 6a = a\ (a+6)$.

Следовательно, общим знаменателем данных дробей служит выражение $a(a+6)(a-6)$.

Тогда $\dfrac{4a^2}{a^2-36}=\dfrac{4a^2\ ^{\backslash a}}{(a+6)(a-6)}=\dfrac{4a^3}{a(a+6)(a-6)}=\dfrac{4a^3}{a^3-36a}$;

$$\frac{6}{a^2+6a}=\frac{6\ ^{\backslash a-6}}{a(a+6)}=\frac{6a-36}{a(a+6)(a-6)}=\frac{6a-36}{a^3-36a}.$$ ■

Пример 4. Известно, что $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=2$. Найдите значение дроби $\dfrac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}$.

Решение. Если $b=0$, то $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=\dfrac{3a}{2a}=\dfrac{3}{2}$, что противоречит условию. Следовательно, $b\neq 0$.

Из условия $\dfrac{3a+4b}{2a-b}=2$ следует, что $3a+4b=4a-2b$; $a=6b$. Тогда

$$\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}=\frac{216b^3-216b^3-6b^3+12b^3}{18b^3+216b^3-216b^3}=\frac{1}{3}.$$ ■

Пример 5. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Решение. Областью определения данной функции является множество всех чисел, кроме $x=1$. Имеем:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\ \text{т. е. } y=x+1,$$

где $x\neq 1$.

Следовательно, искомым графиком является прямая $y=x+1$, за исключением одной точки $(1; 2)$ (рис. 35.1). ■

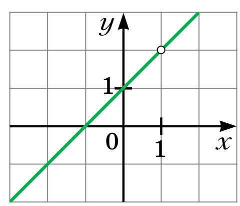


Рис. 35.1

Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2-9)x=$ $=a+3$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $(a+3)(a-3)x=a+3$ и рассмотрим три случая.

1) $a=-3$.

В этом случае получаем уравнение $0x=0$, корнем которого является любое число.

2) $a=3$.

Тогда получаем уравнение $0x=6$, не имеющее корней.

3) $a\neq -3$ и $a\neq 3$.

Тогда $x=\dfrac{a+3}{(a+3)(a-3)}=\dfrac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$. ■

? **1.** Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

Упражнения

35.1. Сократите дробь:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 5) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 4) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 6) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

35.2. Сократите дробь:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 6) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

35.3. Восстановите равенства:

1) $\frac{a}{3} = \frac{}{6a} = \frac{}{9a^3} = \frac{}{5b} = \frac{4a^2c^3}{}$; 2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{} = \frac{}{2n^2} = \frac{}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{}$.

35.4. Сократите дробь:

1) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 5) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 9) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 6) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$; 10) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;

3) $\frac{12a+18b}{12a}$; 7) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$; 11) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

4) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 8) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 12) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

35.5. Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

35.6. Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{1}{8ab}$ и $\frac{1}{2a^3}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ и $\frac{4y}{3m^2n^4}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{2}{a^2-b^2}$;

4) $\frac{3d}{m-n}$ и $\frac{8p}{(m-n)^2}$;

5) $\frac{x}{2x+1}$ и $\frac{x}{3x-2}$;

6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ и $\frac{a}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{3a}{4a-4}$ и $\frac{2a}{5-5a}$;

8) $\frac{7a}{b-3}$ и $\frac{c}{9-b^2}$.

35.7. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ и $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ и $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ и $\frac{z}{y^2-25}$;

4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ и $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ и $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ и $\frac{3a}{a+b}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ и $\frac{c}{4-c}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ и $\frac{m}{m-5}$.

35.8. Сократите дробь:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

35.9. Сократите дробь:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;

2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;

3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

35.10. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}}$;

2) $\frac{2^{2n+1}\cdot 7^{n+1}}{6\cdot 28^n}$;

3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot 5^n}$.

35.11. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot 2^{n+1}}$;

2) $\frac{41\cdot 9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

35.12. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ и $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\dfrac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ и $\dfrac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\dfrac{a}{a^2-7a}$ и $\dfrac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x}{x^2-2x+1}$ и $\dfrac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\dfrac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\dfrac{b}{2a-2b}$ и $\dfrac{ab}{4a-4c}$.

35.13. Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями дроби:

1) $\dfrac{3a}{3a-2}$, $\dfrac{a}{9a+6}$ и $\dfrac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\dfrac{1}{a-5b}$, $\dfrac{1}{a^2+7ac}$ и $\dfrac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

35.14. Найдите значение выражения $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, если $\dfrac{x}{y}=2$.

35.15. Найдите значение выражения $\dfrac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, если $\dfrac{a}{b}=5$.

35.16. Известно, что $2a-6b=1$. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{8}{a-3b}$; 2) $\dfrac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

35.17. Найдите значение выражения $\dfrac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$, если $4m+3n=8$.

35.18. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{a^2-3ab-b^2}{a^2-b^2}$, если $\dfrac{3a+2b}{4a-b}=1$; 2) $\dfrac{m^3+2m^2n}{n^3-mn^2}$, если $\dfrac{5m-n}{3m+2n}=2$.

35.19. Какая фигура является графиком функции $y=\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+4}$?

35.20. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}-\dfrac{2x^2-4x}{x}$;

2) $y=\dfrac{x-3}{3-x}$; 4) $y=\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{2}{x+4}$.

35.21. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$; 2) $y=x-\dfrac{x}{x}$; 3) $y=\dfrac{x^2-3x}{x}-\dfrac{2x^2-2}{x^2-1}$.

35.22. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{|x|}{x}$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$.

35.23. Решите уравнение:

1) $\frac{x+1}{x+1}=1$; 2) $\frac{x^2-25}{x-5}=10$; 3) $\frac{x+6}{|x|-6}=0$.

35.24. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$; 2) $\frac{|x|-7}{x-7}=0$.

35.25. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $ax=1$;

2) $ax=a$;

3) $(a-6)x=a^2-12a+36$;

4) $(a^2-4)x=a-2$.

35.26. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a+3)x=3$; 2) $(a^2-9a)x=a^2-18a+81$.

35.27. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1) $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ неотрицательное;

2) $\frac{2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$ положительное;

3) $\frac{(x-1)^3}{x^3-x^2+4x-4}$ неотрицательное;

4) $\frac{x^2-4}{12+x^2-x^4}$ отрицательное.

35.28. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1) $\frac{x-1}{x^3-x^2+2x-2}$ положительное;

2) $\frac{(x-2)^3}{x^3-2x^2+x-2}$ неотрицательное;

3) $\frac{x^2-1}{4-3x^2-x^4}$ отрицательное.

35.29. Известно, что $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k$. Докажите, что если $b_1+b_2+\ldots+b_n\neq 0$, то $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=k$.

35.30. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2x+4}{x^2+x-2}$;

2) $\dfrac{a^2-4a+3}{a^2+2a-3}$;

3) $\dfrac{2b^3+3b^2+3b+1}{2b+1}$;

4) $\dfrac{x+3}{x^3+6x^2+12x+9}$;

5) $\dfrac{a^4+4}{a^2+2a+2}$;

6) $\dfrac{n^4+4n^3+8n^2}{n^4+64}$;

7) $\dfrac{y^4+y^2+1}{y^2-y+1}$;

8) $\dfrac{m^2+m+3}{m^4+5m^2+9}$;

9) $\dfrac{b^{47}+b^{46}+\ldots+b+1}{b^{23}+b^{22}+\ldots+b+1}$;

10) $\dfrac{a^{38}-a^{37}+a^{36}-\ldots-a+1}{a^{12}-a^{11}+a^{10}-\ldots-a+1}$.

35.31. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3y+9}{y^2+y-6}$;

2) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+3x+2}$;

3) $\dfrac{2x^3-9x^2+27x-27}{4x^2-9}$;

4) $\dfrac{z^4+7z^2+16}{z^2+z+4}$;

5) $\dfrac{y^{55}+y^{54}+\ldots+y+1}{y^{27}+y^{26}+\ldots+y+1}$;

6) $\dfrac{a^{59}-a^{58}+a^{57}-\ldots+a-1}{a^{19}-a^{18}+a^{17}-\ldots+a-1}$.

35.32. Известно, что $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\dfrac{x_3}{x_4}$. Докажите, что $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}\right)^3=\dfrac{x_1}{x_4}$.

35.33. Для положительных чисел a, b и c выполняется равенство $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c}{a+b}$. Найдите значение выражения $\dfrac{(a+b)^2}{c^2}+\dfrac{(a+c)^2}{b^2}+\dfrac{(b+c)^2}{a^2}$.

35.34. Для положительных чисел a, b и c выполняется равенство $\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{a+c+d}=\dfrac{c}{a+b+d}=\dfrac{d}{a+b+c}$. Найдите значение выражения $\dfrac{a+b+c}{d}+\dfrac{a+b+d}{c}+\dfrac{a+c+d}{b}+\dfrac{b+c+d}{a}$.

35.35. Известно, что $a^3+7a-9=0$. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{2a^3+3a}{11a-18}$;

2) $\dfrac{2a^4+14a^2-17a+3}{2a+6}$.

35.36. Сократите дробь $\frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1}$.

35.37. Разложите на множители многочлен $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$.

Упражнения для повторения

35.38. Упростите выражение:

1) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
2) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
4) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
5) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

35.39. Какое наименьшее значение и при каких значениях a и b принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

35.40. Расстояние от села Вишнёвое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневое до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишнёвое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневое до станции, на 5 мин больше, причём скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

§ 36 Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Аналогично складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Пример 1. Выполните вычитание:

1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Решение. 1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=$

$=\frac{2a+1}{2a-1}$. ■

Пример 2. Известно, что $\frac{m}{n}=-3$. Найдите значение выражения $\frac{2m+n}{m}$.

Решение. Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$.

Ответ: $1\frac{2}{3}$. ■

Пример 3. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ является целым числом.

Решение. Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Выражение $2n+3$ принимает натуральные значения при любом натуральном n. Поэтому выражение $2n+3-\frac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\frac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при таких натуральных значениях n: 1, 3, 5, 15.

Ответ: {1, 3, 5, 15}. ■

Пример 4. При каких целых значениях n значение дроби $\frac{3n^2+5n-13}{n+2}$ является целым числом?

Решение. Имеем:

$$\frac{3n^2+5n-13}{n+2}=\frac{3n^2+6n-n-2-11}{n+2}=\frac{3n(n+2)-(n+2)-11}{n+2}=$$

$$=\frac{3n(n+2)}{n+2}-1-\frac{11}{n+2}=3n-1-\frac{11}{n+2}.$$

Дробь $\frac{11}{n+2}$ принимает целые значения только тогда, когда её знаменатель принимает одно из четырёх значений: -1, 1, -11, 11. Отсюда n принимает такие значения: -3, -1, -13, 9.

Ответ: $\{-3, -1, -13, 9\}$. ■

Выполненные в примерах 2–4 преобразования рациональной дроби называют **выделением целой части из дроби.**

?

1. Какая дробь является суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?
2. Какая дробь является разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?

Упражнения

36.1. Выполните действия:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
5) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
6) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

36.2. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
2) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
3) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
4) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

36.3. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$.

36.4. Упростите выражение:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

36.5. Выполните действия:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;

3) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

4) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

36.6. Упростите выражение:

1) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;

2) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

36.7. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;

2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

36.8. Найдите значение выражения:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;

2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

36.9. Упростите выражение:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

36.10. Упростите выражение:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

36.11. Выполните действия:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$;

4) $\frac{x^2}{(x-3)^2}-\frac{6x-9}{(3-x)^2}$.

36.12. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\frac{a^3}{(a-2b)^3}+\frac{8b^3}{(2b-a)^3}$;

3) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$;

4) $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$.

36.13. Докажите тождество:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1;$ 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$

36.14. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения x.

36.15. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной y значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения y.

36.16. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

36.17. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

36.18. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x};$ 2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}.$

36.19. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a};$ 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}.$

36.20. Известно, что $\frac{x}{y} = 4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x};$ 2) $\frac{2x-3y}{y};$ 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}.$

36.21. Известно, что $\frac{a}{b} = -2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a};$ 2) $\frac{4a+5b}{b};$ 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$

36.22. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n};$ 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n};$ 3) $\frac{4n+7}{2n-3}.$

36.23. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n};$ 2) $\frac{n^2+2n-8}{n};$ 3) $\frac{9n-4}{3n-5}.$

36.24. Докажите, что при любом натуральном значении n значение дроби не является целым числом:

1) $\frac{n^2+n+1}{n+1}$; 2) $\frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2+1}$.

36.25. При каких целых значениях n значение дроби является целым числом:

1) $\frac{2n^2+7n-4}{n+3}$; 2) $\frac{4n^2-11n+23}{n-2}$?

36.26. Докажите, что при любом натуральном значении n значение дроби является целым числом:

1) $\frac{n^3-2n+1}{n^2+n-1}$; 2) $\frac{n^3-4n-3}{n^2-n-3}$.

36.27. Числа a, b и c таковы, что значения выражений $a+b+c$ и $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ являются целыми числами. Докажите, что значение выражения $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ также является целым числом.

Упражнения для повторения

36.28. Из двух сёл, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

36.29. Докажите, что выражение $(a+4)(a-8)+4(2a+9)$ при всех значениях a принимает неотрицательные значения.

36.30. Виктор и Галина ехали в одном поезде. Виктор ехал в седьмом вагоне от головы поезда, а Галина — в восемнадцатом вагоне от хвоста поезда. Однако они ехали в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

36.31. Докажите, что значение выражения $999 \cdot 1001 \cdot 1002 + 1001 \cdot 1003$ является кубом натурального числа.

§ 37 Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Так же как и в случае с обыкновенными дробями, применяя основное свойство рациональной дроби, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть надо сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тогда $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Заметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним, что при нахождении общего знаменателя обыкновенных дробей мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично для нахождения общего знаменателя рациональных дробей может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}$.

Решение. 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен a^2bc. Следовательно,

$$\frac{b+1}{abc}^{\backslash a} + \frac{1-a}{a^2c}^{\backslash b} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} = \frac{m}{7(m+n)}^{\backslash m-n} - \frac{n}{7(m-n)}^{\backslash m+n} =$$

$$= \frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)} = \frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) $\dfrac{10n+14}{n^2-49}+\dfrac{6}{7-n}=\dfrac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\dfrac{6^{\backslash n+7}}{n-7}=\dfrac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$

$=\dfrac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\dfrac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\dfrac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\dfrac{4}{n+7}.$

4) $\dfrac{2a}{25-10a+a^2}-\dfrac{1}{3a-15}=\dfrac{2a}{(5-a)^2}-\dfrac{1}{3(a-5)}=\dfrac{2a^{\backslash 3}}{(a-5)^2}-\dfrac{1^{\backslash a-5}}{3(a-5)}=$

$=\dfrac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\dfrac{5a+5}{3(a-5)^2}.$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\frac{x^{\backslash x-2}}{x-4}-\frac{x+2^{\backslash x-4}}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.\ \blacksquare$$

Пример 2. Представьте в виде дроби выражение $\dfrac{21c^2}{7c-2}-3c$.

Решение. Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{3c^{\backslash 7c-2}}{1}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.\ \blacksquare$$

Заметим, что *сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями*.

?

1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?

2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

Упражнения

37.1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{5m-n}{14m}-\dfrac{m-6n}{7m}$;
3) $\dfrac{k+4}{k}-\dfrac{3k-4}{k^2}$;
5) $\dfrac{2m-3n}{m^2n}+\dfrac{7m-2n}{mn^2}$;

2) $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{a-c}{ac}$;
4) $\dfrac{x-y}{x^3}-\dfrac{y-x^2}{x^2y}$;
6) $\dfrac{c+d}{cd^4}-\dfrac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

37.2. Выполните вычитание дробей:

1) $\dfrac{4d+7}{7d}-\dfrac{d-6}{6d}$;
3) $\dfrac{6a+2}{ab}-\dfrac{2a+4}{a^2b}$;
5) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1+x^2}{x^5}$;

2) $\dfrac{m-n}{mn}-\dfrac{p-n}{np}$;
4) $\dfrac{c^2-16}{c^6}-\dfrac{c-9}{c^5}$;
6) $\dfrac{1-ab}{abc}-\dfrac{1-ad}{acd}$.

37.3. Выполните действия:

1) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$; 3) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;

2) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$; 4) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$.

37.4. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$; 3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

37.5. Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$; 3) $\frac{m+1}{3m-15}+\frac{1-m}{2m-10}$; 5) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

2) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$; 4) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$; 6) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}+\frac{x-3y}{xy-2y^2}$.

37.6. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$; 3) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

2) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$; 4) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$.

37.7. Выполните действия:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$; 3) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;

2) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$; 4) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

37.8. Упростите выражение:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$; 3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$; 4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

37.9. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{y}-x$; 3) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$; 5) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

2) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$; 4) $\frac{3b+4}{b-2}-3$; 6) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

37.10. Выполните действия:

1) $a-\frac{4}{a}$; 3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$; 5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$; 4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$; 6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

37.11. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

37.12. Упростите выражение:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

37.13. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

37.14. Представьте в виде дроби выражение:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

37.15. Упростите выражение:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

37.16. Докажите тождество:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$.

37.17. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

37.18. Найдите разность дробей:

1) $\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\dfrac{1}{b+3}-\dfrac{b^2-6b}{b^3+27}$.

37.19. Упростите выражение:

1) $\dfrac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\dfrac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;

2) $1-\dfrac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\dfrac{2b}{2b+1}$.

37.20. Докажите тождество: $\dfrac{3a^2+24}{a^3+8}-\dfrac{6}{a^2-2a+4}-\dfrac{1}{a+2}=\dfrac{2}{a+2}$.

37.21. Упростите выражение:

1) $\dfrac{4b}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}+\dfrac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\dfrac{1}{(a-5b)^2}-\dfrac{2}{a^2-25b^2}+\dfrac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\dfrac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\dfrac{x+5}{y-2}$.

37.22. Докажите тождество:

1) $\dfrac{a+3}{a^2-3a}+\dfrac{a-3}{3a+9}+\dfrac{12}{9-a^2}=\dfrac{a-3}{3a}$;

2) $\dfrac{b-4}{2a-1}-\dfrac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\dfrac{2}{2a-1}$;

3) $\dfrac{1}{a^2+12a+36}+\dfrac{2}{36-a^2}+\dfrac{1}{a^2-12a+36}=\dfrac{144}{(a^2-36)^2}$.

37.23. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

2) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

37.24. Докажите тождество:

1) $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$;

2) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$.

37.25. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Воспользовавшись этим равенством, найдите значение суммы:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{11}{5^2 \cdot 6^2}.$$

37.26. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

37.27. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)}$;

2) $\frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}$.

37.28. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)}$;

2) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$.

37.29. Докажите тождество:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \frac{8}{x^2-16} =$$

$$= 5\left(\frac{1}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{(x-2)(x+3)} + \frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{(x-4)(x+1)}\right).$$

37.30. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

37.31. Докажите тождество:

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}.$$

37.32. Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$, то $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4$.

37.33. Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b = 0$ или $c = 0$.

37.34. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что $\frac{1}{a^3+b^3+c^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$.

37.35. Найдите значение выражения $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если $\frac{1}{x^2+1}+$ $+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ и $x \neq y$.

37.36. Числа a, b и c таковы, что $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=0$. Докажите, что одно из слагаемых в левой части равенства равно 0.

37.37. Числа a, b и c таковы, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=-\frac{1}{30}$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$; 2) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

37.38. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{3}{2}$. Найдите значение выражения $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

37.39. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Докажите, что $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+$ $+\frac{ca}{b^2}=3$.

37.40. Числа a, b и c таковы, что $\frac{b+c-a}{a}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+a-c}{c}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

37.41. Найдите значение выражения $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$, если $xyz=1$.

Упражнения для повторения

37.42. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

37.43. За первый день трёхдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — остальные 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за 3 дня?

37.44. (*Из болгарского фольклора.*) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечётное количество овец. Возможно ли это?

37.45. Верно ли утверждение, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ делится нацело на 48?

37.46. Докажите, что если $xy + z = yz + x = zx + y$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

§ 38 Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Аналогично выполняют умножение и деление рациональных дробей.

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Пример 1. Выполните действия:

1) $(2x - 12) \cdot \dfrac{4x}{x^2 - 12x + 36}$;

2) $\dfrac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \dfrac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}$;

3) $\dfrac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7)$.

Решение. 1) Представив многочлен $2x - 12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

$$2)\ \frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}.$$

$$3)\ \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}. \blacksquare$$

Правило умножения двух дробей можно обобщить для нахождения произведения трёх и более рациональных дробей. Например, для трёх дробей имеем:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C\cdot P}{B\cdot D\cdot Q}.$$

Пример 2. Упростите выражение $\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}:\frac{4a^2}{9bc^3}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}:\frac{4a^2}{9bc^3}=\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}\cdot\frac{9bc^3}{4a^2}=\frac{2a^5\cdot 10b^2\cdot 9bc^3}{15b^3\cdot 7c^4\cdot 4a^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 10\cdot 9\cdot a^5b^3c^3}{15\cdot 7\cdot 4\cdot a^2b^3c^4}=\frac{3a^3}{7c}.\ ■$$

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального n, $n > 1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n\text{ множителей}}=\frac{\overbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}^{n\text{ множителей}}}{\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{n\text{ множителей}}}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ договорились, что $\left(\frac{A}{B}\right)^1=\frac{A}{B}$.

Следовательно,

$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$, где n — натуральное число.

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Пример 3. Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Решение. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3=-\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3}=-\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}.$ ■

?

1. Какая дробь является произведением двух рациональных дробей?
2. Какая дробь является частным двух рациональных дробей?
3. Как возвести рациональную дробь в степень?

Упражнения

38.1. Выполните умножение:

1) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
2) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
3) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
4) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;
5) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$;
6) $\frac{25a^2c}{64b^4} \cdot \frac{77b^6}{10ac^3}$.

38.2. Упростите выражение:

1) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
2) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
3) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
4) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

38.3. Упростите выражение:

1) $\frac{2mn + n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
2) $\frac{7a + 7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a + b}$;
3) $\frac{m - 2}{m^2 - 49} \cdot \frac{m + 7}{m - 2}$;
4) $(a + 4) \cdot \frac{a}{2a + 8}$;
5) $\frac{4a^2 - 4a + 1}{3a + 3} \cdot \frac{a + 1}{2a - 1}$;
6) $\frac{a^2 - 25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2 - 5a}$.

38.4. Выполните умножение:

1) $\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;
2) $\frac{5x - 5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x - y}$;
3) $\frac{6}{m^2 - 9n^2} \cdot (m - 3n)$;
4) $\frac{3c - 9}{9c^2 + 6c + 1} \cdot \frac{3c + 1}{c - 3}$.

38.5. Выполните деление:

1) $\frac{3b}{8} : b$;
2) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
3) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
4) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;
5) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$;
6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right)$.

38.6. Найдите частное:

1) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$;
2) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$;
3) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$.

38.7. Упростите выражение:

1) $\frac{x^2 - y^2}{x^2} : \frac{6x + 6y}{x^5}$;
2) $\frac{c - 5}{c^2 - 4c} : \frac{c - 5}{5c - 20}$;
3) $\frac{x - y}{xy} : \frac{x^2 - y^2}{3xy}$;
4) $\frac{a^2 - 4a + 4}{a + 2} : (a - 2)$;
5) $(p^2 - 16k^2) : \frac{p + 4k}{p}$;
6) $\frac{a^2 - ab}{a^2} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}$.

38.8. Выполните деление:

1) $\dfrac{p+3}{p^2-2p}:\dfrac{p+3}{4p-8}$;

2) $\dfrac{a^2-16}{a-3}:\dfrac{a+4}{a-3}$;

3) $\dfrac{y-9}{y-8}:\dfrac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

4) $(x^2-49y^2):\dfrac{x-7y}{x}$.

38.9. Выполните возведение в степень:

1) $\left(\dfrac{c}{2d}\right)^5$;

2) $\left(\dfrac{5a^6}{b^5}\right)^2$;

3) $\left(-\dfrac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

38.10. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\dfrac{a^6}{b^3}\right)^{10}$;

2) $\left(-\dfrac{4m}{9n^3}\right)^2$;

3) $\left(-\dfrac{10c^7}{3d^5}\right)^3$;

4) $\left(\dfrac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

38.11. Выразите переменную x через переменные a и b, если:

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=b$;

2) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{x}{4}=\dfrac{b}{a}$.

38.12. Выразите переменную x через переменные m и n, если:

1) $2x-\dfrac{m}{n}=2$;

2) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{n}$.

38.13. Упростите выражение:

1) $\dfrac{33m^8}{34n^8}:\dfrac{88m^4}{51n^4}:\dfrac{21m^6}{16n^2}$;

2) $\dfrac{36x^6}{49y^5}:\dfrac{24x^9}{25y^4}\cdot\dfrac{7x^2}{30y}$;

3) $\left(\dfrac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\dfrac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

38.14. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\dfrac{4b^4c^2}{27a^7}:\dfrac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\dfrac{3a^2}{2b^2c^2}:\dfrac{7c^8}{6b^3}:\dfrac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\dfrac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\dfrac{b^{18}}{50a^{16}}$;

4) $\left(\dfrac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\dfrac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

38.15. Замените переменную x таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\dfrac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\dfrac{6a}{b^2}$;

2) $\left(\dfrac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\dfrac{b^6}{12}$.

38.16. Выполните умножение и деление дробей:

1) $\dfrac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\dfrac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

2) $\dfrac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\dfrac{b^3+27}{5b-15}$;

3) $\dfrac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\dfrac{12ab^2}{4a+16}$;

4) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

5) $\dfrac{m+2n}{2-3m}:\dfrac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

6) $\dfrac{a^3+8}{16-a^4}:\dfrac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

7) $\dfrac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\dfrac{x^2-49}{4x-24}$;

8) $\dfrac{3a+15b}{a^2-81b^2}:\dfrac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

38.17. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\dfrac{a}{1+a^2}$;

2) $\dfrac{a^2-8ab}{12b}:\dfrac{8b^2-ab}{24a}$;

3) $\dfrac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\dfrac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

4) $\dfrac{mn^2-36m}{m^3-8}:\dfrac{2n+12}{6m-12}$;

5) $\dfrac{a^4-1}{a^2-a+1}:\dfrac{a-1}{a^3+1}$;

6) $\dfrac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

38.18. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\dfrac{x}{4x^2-4y^2}:\dfrac{1}{6x+6y}$, если $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

2) $(3a^2-18a+27):\dfrac{3a-9}{4a}$, если $a=0{,}5$;

3) $\dfrac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\dfrac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, если $a=0{,}8$.

38.19. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{a^2-ab}:\dfrac{b}{b^2-a^2}$, если $a=2\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{3}{7}$;

2) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\dfrac{3a+6b}{2a-6b}$, если $a=4$, $b=-5$.

38.20. Упростите выражение (n — натуральное число):

1) $\dfrac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}}:\dfrac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}}$;

2) $\dfrac{(a^n+b^n)^2-4a^nb^n}{a^{3n}+b^{3n}}:\dfrac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^n-b^n)^2+4a^nb^n}$.

38.21. Упростите выражение (n — натуральное число):

1) $\dfrac{x^{n+3}y^{4n-1}}{z^{n+4}}\cdot\dfrac{z^{2n+5}}{x^{n+1}y^{3n-2}}$;

2) $\dfrac{(x^n-2y^n)^2+8x^ny^n}{x^{3n}-8y^{3n}}:\dfrac{x^{2n}-4y^{2n}}{(x^n+2y^n)^2-8x^ny^n}$.

38.22. Известно, что $x - \frac{1}{x} = 9$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

38.23. Известно, что $3x + \frac{1}{x} = -4$. Найдите значение выражения $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

38.24. Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Найдите значение выражения $x + \frac{4}{x}$.

38.25. Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Найдите значение выражения $x - \frac{1}{x}$.

38.26. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2}$;

2) $\frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}$.

38.27. Выполните действия:

1) $\frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} \cdot \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25}$;

2) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}$.

38.28. Докажите тождество:

1) $\frac{8a^2}{a - 3b} : \frac{6a^3}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{3a}{4a + 12b} = 1$;

2) $\frac{a^4 - 1000ab^3}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2b - 100b^3} : \frac{a^3 + 10a^2b + 100ab^2}{ab + 10b^2} = \frac{a + b}{a - b}$.

38.29. Докажите тождество:

$$\frac{a^2 + a}{2a - 12} \cdot \frac{6a + 6}{2a + 12} : \frac{9a^3 + 18a^2 + 9a}{a^2 - 36} = \frac{1}{6}.$$

38.30. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1}{a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b + 1} : \frac{a + b - 1}{a - b + 1}$;

2) $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 + 4x - 21} : \frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + 14x + 49}$.

38.31. Упростите выражение:

1) $\frac{n^2 - 9}{n^2 - 1} : \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 - 4n + 3}$;

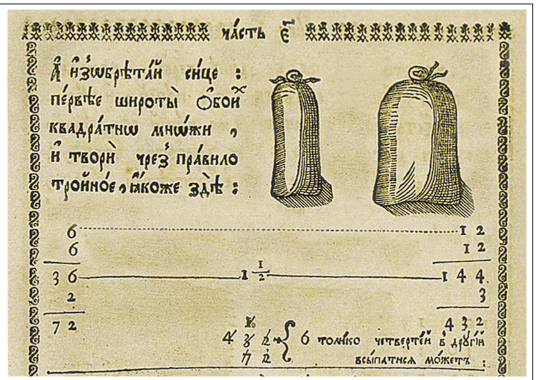
2) $\frac{a^5 + 1}{a^3 + a^2 + a + 1} : \frac{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}{a^4 - 1}$.

Упражнения для повторения

38.32. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта B со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

38.33. В двух бидонах находится 80 л молока. Если из одного бидона перелить 20 % молока в другой бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

38.34. (*Из учебника «Арифметика» Л.Ф. Магницкого*.) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребёнок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?



38.35. Докажите, что число 1 111 155 556 является квадратом натурального числа.

§ 39 Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий над рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Решение. Аналогично нахождению значения числового выражения, содержащего несколько арифметических действий, данное выражение можно упростить, выполняя действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

1) $\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2 - 4a + 4} = \frac{3a^{\backslash a-2}}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2 - 6a - 6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2 - 12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2 - 12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2 - 12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} =$

$= \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2 + 6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2 + 6a}{a-2} - \frac{2a^2 + 8a}{a-2} = \frac{3a^2 + 6a - 2a^2 - 8a}{a-2} = \frac{a^2 - 2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a$.

Ответ: a. ■

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по отдельным действиям, а цепочкой. Проиллюстрируем этот приём на следующем примере.

Пример 2. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения a.

Решение. $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} = \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} =$

$= \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.$

Следовательно, при всех допустимых значениях a значение данного выражения равно 3. ■

Пример 3. Докажите тождество $\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$.

Решение. Для преобразования левой части данного равенства целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} =$$

$$= \frac{1^{\backslash a+1}}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано. ■

Пример 4. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}}$.

Решение. Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно умножить её числитель и знаменатель на одночлен abc:

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}}=\frac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)abc}{\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\dfrac{1}{a}\cdot abc+\dfrac{1}{b}\cdot abc+\dfrac{1}{c}\cdot abc}{\dfrac{1}{ab}\cdot abc+\dfrac{1}{bc}\cdot abc+\dfrac{1}{ac}\cdot abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Ответ: $\dfrac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ■

Упражнения

39.1. Выполните действия:

1) $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^2-4}{3a-3}-\dfrac{3}{a-2}$;

2) $\dfrac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\dfrac{b-3}{b+3}+\dfrac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\dfrac{1}{4b^2-a^2}\right):\dfrac{2a}{a^2-4b^2}$;

4) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-2}{x^2+3x}\right):\dfrac{x^2+6}{x^3-9x}$.

39.2. Выполните действия:

1) $\dfrac{b+4}{b^2-6b+9}:\dfrac{b^2-16}{2b-6}-\dfrac{2}{b-4}$;

2) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}:\left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$;

3) $\left(\dfrac{2a-3}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-1}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-2}{a^3-4a}$.

39.3. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\dfrac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{a}{b^2}\right)\cdot\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{2}{b-a}$;

3) $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right):\dfrac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

4) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\dfrac{4y}{x+2y}$;

5) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}+\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{4}$.

39.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\dfrac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\dfrac{2c-9}{c+8}\right):\dfrac{c^2+3c}{c^2-64}+\dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{3+x}{3-x}\right):\dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4}+\dfrac{9y+6}{y^3-8}+\dfrac{1}{y-2}\right)\cdot\dfrac{y^2-4}{18}$.

39.5. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right):\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\dfrac{3}{36-c^2}+\dfrac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\dfrac{(c-6)^2}{2}+\dfrac{3c}{c+6}=2$.

39.6. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{b}{a^2 - ab} - \dfrac{2}{a - b} - \dfrac{a}{b^2 - ab}\right) : \dfrac{a^2 - b^2}{4ab} = \dfrac{4}{a + b}$;

2) $\dfrac{(a - b)^2}{a} \cdot \left(\dfrac{a}{(a - b)^2} + \dfrac{a}{b^2 - a^2}\right) + \dfrac{3a + b}{a + b} = 3.$

39.7. Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

1) $\left(\dfrac{a + 3}{a^2 - 1} - \dfrac{1}{a^2 + a}\right) : \dfrac{3a + 3}{a^2 - a}$;

2) $\left(\dfrac{a}{a^2 - 49} - \dfrac{1}{a + 7}\right) : \dfrac{7a}{a^2 + 14a + 49} - \dfrac{2}{a - 7}$?

39.8. Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

1) $\dfrac{3x^2 - 27}{4x^2 + 2} \cdot \left(\dfrac{6x + 1}{x - 3} + \dfrac{6x - 1}{x + 3}\right)$;

2) $\dfrac{3}{2a - 3} - \dfrac{8a^3 - 18a}{4a^2 + 9} \cdot \left(\dfrac{2a}{4a^2 - 12a + 9} - \dfrac{3}{4a^2 - 9}\right)$.

39.9. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a - \dfrac{a^2}{a + 1}}{a - \dfrac{a}{a + 1}}$;

2) $\dfrac{a - \dfrac{6a - 9}{a}}{1 - \dfrac{3}{a}}$;

3) $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{a + 1}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a - b}{b} + 1}{\dfrac{2a + b}{b} - 1} + \dfrac{3 - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b} - 1}$.

39.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{a - b}{a + b} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a + b} - \dfrac{a - b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a + 1}}}$.

39.11. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^2}{b^3 - ab^2} + \dfrac{a - b}{b^2} - \dfrac{1}{b}\right) : \left(\dfrac{a + b}{b - a} - \dfrac{b - a}{a + b} + \dfrac{6a^2}{a^2 - b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a + 2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \dfrac{2 - a}{1 - 8a^3} \cdot \dfrac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a}\right) : \left(\dfrac{1}{1 - 2a}\right)^2 - \dfrac{8a - 1}{2a^2 + a}$;

3) $(a^2-b^2)\cdot\left(\dfrac{2a^2b+2ab^2}{7a^3+a^2b+7ab^2+b^3}\cdot\dfrac{7a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}\right).$

39.12. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\dfrac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\dfrac{3y-1}{y}-\dfrac{5-6y}{3y-1}\right);$

2) $\left(3+\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right):\left(3+\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}.$

39.13. Докажите тождество:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1;$

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1;$

3) $\left(a^2-b^2-\dfrac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)=(a-b)^2.$

39.14. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ принимает положительные значения.

39.15. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{6a-4-a^2}{a^3-8}-\dfrac{2-a}{a^2+2a+4}\right)\cdot\dfrac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3};$

2) $\left(\dfrac{x-2y}{x^3+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3};$

3) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{b-a-c}{abc}.$

39.16. Докажите, что значение выражения положительно при всех допустимых значениях переменных:

1) $\dfrac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{a^2+b^2+2ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right);$

2) $\left(\dfrac{a^2}{4b^3}+\dfrac{2}{a}\right):\left(\dfrac{a}{2b^2}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{a}\right):\dfrac{(a-2b)^2+8ab}{4+\dfrac{2a}{b}}.$

39.17. Упростите выражение

$$\left(\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right).$$

39.18. Докажите тождество $\dfrac{\left(\dfrac{a^3}{(b-1)^3}+1\right)\left(\dfrac{a}{b-1}-1\right)}{\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-\dfrac{a}{b-1}+1\right)}=1.$

39.19. Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

39.20. Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}\right)+\frac{2}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)+\frac{2}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

39.21. Числа a, b и c таковы, что $a+b+c=7$, $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0{,}7.$

Найдите значение выражения $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

39.22. Числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$. Докажите, что $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0.$

39.23. Числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Докажите, что $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0.$

39.24. Найдите сумму

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n}}}}}.$$

Упражнения для повторения

39.25. Докажите, что значение выражения $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ делится нацело на 11.

39.26. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ делится нацело на 10.

39.27. На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нём осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько килограммов картофеля было на первом складе сначала?

39.28. Куртка стоила на 1500 р. меньше, чем костюм. Во время сезонной распродажи куртка подешевела на 10 %, а костюм — на 20 %, после чего куртку и костюм можно было приобрести за 8000 р. Какова первоначальная цена куртки и какова — костюма?

39.29. Рабочий должен был изготовлять ежедневно 10 деталей. Однако он изготовлял ежедневно 12 деталей, и уже за 2 дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

39.30. (*Из русского фольклора*.) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за трёх воробьёв платили одну монету, за двух голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — две монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

§ 40 Степень с нулевым и целым отрицательным показателем

В науке и практике для короткой записи значений величин часто используют степени числа 10.

Например, расстояние от Земли до Полярной звезды равно 4 470 000 000 000 000 км или $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Масса Солнца равна 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг или $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Это были примеры из макромира, т. е. мира очень больших физических величин. Приведём примеры из микромира, т. е. мира очень маленьких физических величин.

Масса атома водорода равна 0,00000000000000000000000000001673 кг.

Радиус атома кислорода равен 0,0000000066 см.

Для записи этих величин тоже можно использовать степень числа 10. Например: $0{,}00000000000000000000000000001673$ кг $= \dfrac{1{,}673}{10^{27}}$ кг,

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^9} \text{ см}.$$

Однако если договориться обозначить $\dfrac{1}{10^{27}}$ и $\dfrac{1}{10^9}$ соответственно 10^{-27} и 10^{-9}, то для рассмотренных величин получим «одноэтажную» форму записи: $\dfrac{1{,}673}{10^{27}} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$, $\dfrac{6{,}6}{10^9} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогично можно договориться, что, например, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Из определения следует, что, например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \\ = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Итак, вы умеете возводить число в любую целую степень, кроме нуля.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Замечание. Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не определено.

Из данных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и $n \in \boldsymbol{Z}$ числа a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n.

Например, при $n = -2$ имеем $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Решение. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

Вообще, **если $\boldsymbol{a \neq 0}$ и $\boldsymbol{b \neq 0}$, то $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$.**

2) $1{,}2^{-2}=\left(\dfrac{12}{10}\right)^{-2}=\left(\dfrac{6}{5}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2}=\dfrac{25}{36}$.

3) $3^{-3}\cdot 15+6^{-2}\cdot 8-4{,}3^{0}=\dfrac{1}{3^3}\cdot 15+\dfrac{1}{6^2}\cdot 8-1=\dfrac{1}{27}\cdot 15+\dfrac{1}{36}\cdot 8-1=$
$=\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}-1=-\dfrac{2}{9}$. ■

Пример 2. Представьте выражение $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

Решение. $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\dfrac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{1}{(a-b)^2}\cdot\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$
$=\dfrac{1}{(b-a)^2}\cdot\dfrac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=\dfrac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\dfrac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}$. ■

В справочной литературе вы можете найти такую информацию: «Масса Венеры равна $4{,}9\cdot 10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6{,}423\cdot 10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3{,}8\cdot 10^{7}$ км^2».

Эти числа записаны в виде, который называют **стандартным видом числа**.

Определение

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$ и $n\in Z$.

Число n называют **порядком числа**, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома водорода в килограммах, равен –27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171{,}25=1{,}7125\cdot 10^2$; $0{,}00958=9{,}58\cdot 10^{-3}$. Однако на практике стандартный вид числа используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа даёт представление о величине. Например, если порядок числа m равен 3, т. е. $m=a\cdot 10^3$, то с учётом того, что $1\leqslant a<10$, получаем: $10^3\leqslant m<10^4$.

Пример 3. Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Решение. 1) $564\ 000\ 000=5{,}64\cdot 100\ 000\ 000=5{,}64\cdot 10^8$.

2) $0{,}0036=3{,}6\cdot 0{,}001=3{,}6\cdot\dfrac{1}{1000}=3{,}6\cdot\dfrac{1}{10^3}=3{,}6\cdot 10^{-3}$. ■

1. Чему равно a^{-n}, если a — любое число, отличное от нуля, и $n \in \boldsymbol{N}$?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. Как в записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ называют число n?

Упражнения

40.1. Какому из выражений равно выражение a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

40.2. Представьте степень в виде выражения, не содержащего степеней с отрицательными показателями:
1) 5^{-6}; 2) d^{-3}; 3) m^{-1}; 4) $(a - b)^{-2}$.

40.3. Представьте степень в виде выражения, не содержащего степеней с отрицательными показателями:
1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m + n)^{-1}$; 4) $(4c - 5d)^{-10}$.

40.4. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{m}{n^3}$; 3) $\frac{x^6}{y^7}$; 4) $\frac{(x - y)^2}{x + y}$.

40.5. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

1) $\frac{1}{k^4}$; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{m^6}{n^6}$; 4) $\frac{(2x - y)^3}{(x - 2y)^9}$.

40.6. Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

40.7. Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

40.8. Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

40.9. Представьте в виде степени с основанием 10 число:
1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

40.10. Вычислите:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

40.11. Найдите значение выражения:

1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

40.12. Вычислите значение выражения:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 3) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 4) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

40.13. Чему равно значение выражения:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^0 + 0{,}7^0$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

40.14. Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1{,}2 \cdot 10^4$; 3) $0{,}12 \cdot 10^4$?

40.15. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 3400; 3) 0,0046; 5) 0,73; 7) $0{,}23 \cdot 10^4$;

2) 15; 4) 0,000008; 6) $250 \cdot 10^2$; 8) $9300 \cdot 10^5$.

40.16. Используя стандартный вид числа, запишите:

1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;

2) длина реки Лены, самой протяжённой реки России, равна 4400 км;

3) площадь озера Байкал составляет 32 000 км^2;

4) расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;

5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;

6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

40.17. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$;

2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^4$.

40.18. Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

40.19. Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

40.20. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

40.21. Найдите значение выражения:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

40.22. Расположите в порядке убывания:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) 4^{-1}, 4^{3}, 4^{0}, 4^{-2}.

40.23. Расположите в порядке возрастания:

1) 7^{-2}, 7^{2}, 7^{-1}, 7^{0}; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

40.24. Сравните значения выражений:

1) 12^0 и $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ и $0{,}2^{-3}$;
3) 4^6 и $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ и 21^{-1};
5) $5^{-1} - 7^{-1}$ и 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

40.25. Сравните значения выражений:

1) 3^{-2} и $(-3)^0$;
2) $3^{-1} + 2^{-1}$ и 5^{-1};
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

40.26. Представьте в виде дроби выражение:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

40.27. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

40.28. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$:

1) если $a > 0$, то $a^n > 0$;
2) если $a < 0$, то $a^n > 0$ при чётном n и $a^n < 0$ при нечётном n.

40.29. Верно ли неравенство $a^n > a^{-n}$, если:

1) $a > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$; 2) $0 < a < 1$, $n \in \boldsymbol{N}$?

40.30. Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

40.31. Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

40.32. Какое число больше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ или $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ или $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ или $0{,}23 \cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

40.33. Какое число меньше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ или $6{,}15 \cdot 10^{18}$; 2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

40.34. В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

Планета	Расстояние, км
Венера	$1{,}082 \cdot 10^8$
Земля	$1{,}495 \cdot 10^8$
Марс	$2{,}280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5{,}790 \cdot 10^7$
Нептун	$4{,}497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1{,}427 \cdot 10^9$
Уран	$2{,}871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7{,}781 \cdot 10^8$

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

40.35. В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

Химический элемент	Масса атома, кг	Химический элемент	Масса атома, кг
Алюминий	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Медь	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Гелий	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Олово	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Водород	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	Натрий	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Азот	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Золото	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Железо	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
2) У какого из элементов, меди или натрия, масса атома больше?
3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

40.36. В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1{,}1 \cdot 10^9$	Никель	$6{,}8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^6$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^6$
Железо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^5$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^4$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^9$
Медь	$2{,}8 \cdot 10^9$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^8$

1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

Упражнения для повторения

40.37. Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

40.38. В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

40.39. Упростите выражение:
$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

40.40. Можно ли утверждать, что при любом натуральном n значение выражения $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратно 42?

§ 41 Свойства степени с целым показателем

В главе 2 вы изучили свойства степени с натуральным показателем. Они остаются справедливыми и для степени с любым целым показателем.

Теорема 41.1

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (2)$$

Теорема 41.2

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (3)$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени**. Докажем его.

Доказательство.

Для натуральных m и n это равенство уже было доказано в главе 2.

Рассмотрим теперь случай, когда m и n — целые отрицательные числа.

Если m и n — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Имеем: $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Для завершения доказательства основного свойства степени следует рассмотреть ещё такие случаи: один из показателей степени m или n отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) доказывают аналогично. ■

Из основного свойства степени получаем такое важное следствие.

Теорема 41.3

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Имеем: $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$. ■

Из свойств (2) и (3) можно получить ещё одно свойство степени с целым показателем.

Теорема 41.4

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Доказательство.

Имеем: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot b^{-1}\right)^n = a^n \cdot \left(b^{-1}\right)^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$. ■

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем.**

Пример 1. Представьте в виде степени выражение $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Решение. Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8 + (-7) - 6} = a^{-5}$. ■

Пример 2. Найдите значение выражения:

1) $16^{-9} \cdot 8^{12}$;   2) $\frac{6^{-3}}{18^{-3}}$;   3) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$.

Решение. 1) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:

$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1$.

2) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

3) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$

$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}$. ■

Пример 3. Упростите выражение: 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

Решение. 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) =$
$= 0{,}2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} +$
$+ 36 = 5a^{-2}$. ■

Пример 4. Выполните умножение $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

Решение. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23{,}8 \cdot 10^6 =$
$= 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10^7$. ■

? Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

Упражнения

41.1. Найдите значение выражения:

1) $9^5 \cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18} : 3^{-21}$;
4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$;
6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

41.2. Найдите значение выражения:

1) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$;
2) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$;
3) $0{,}8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
4) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

41.3. Упростите выражение:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$;
2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^4$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$;
5) $\frac{kp^{-6}}{k^4p^4}$;
6) $(c^{-6}d^2)^{-7}$;
7) $0{,}2c^{-3}d^5 \cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
8) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
9) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$;
10) $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$.

41.4. Упростите выражение:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\frac{3{,}6a^2b}{0{,}9a^3b^{-3}}$;
4) $0{,}8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$;
5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;
6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

41.5. Найдите значение выражения:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;

2) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;

3) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$;

4) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

5) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;

6) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

41.6. Найдите значение выражения:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$;

3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

4) $8^{-2} : 0,5^4$;

5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;

6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

41.7. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$;

3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;

4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;

5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;

6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

41.8. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;

4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

41.9. Вынесите за скобки степень с основанием a и наименьшим из данных показателей:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

41.10. Вынесите за скобки степень с основанием b и наименьшим из данных показателей:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

41.11. Представьте в виде произведения выражение:

1) $a^{-2} - 4$;

2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;

3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;

4) $a^{-3} + b^{-3}$;

5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;

6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

41.12. Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^{-4} - 25$;

2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;

3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;

4) $a^{-4} - a^{-2}$.

41.13. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;

2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;

4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

41.14. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$;

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$;

3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;

4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

41.15. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с. За сколько минут свет от Солнца дойдёт до Земли? Ответ округлите до единиц.

41.16. Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу медной плитки, длина которой $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

41.17. Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

41.18. Докажите тождество:

$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4})$.

41.19. Упростите выражение:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

41.20. Упростите выражение:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

41.21. Постройте график функции:

1) $y = (x + 3)^0$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{x - 2}\right)^{-1}$;

3) $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^0$;

4) $y = \left(\dfrac{x + 2}{x^2 - 4}\right)^{-1}$;

5) $y = x \cdot \left(\dfrac{x}{x + 3}\right)^{-1}$;

6) $y = \dfrac{(x^2 - 1)^0}{x^{-1}}$.

41.22. Постройте график функции:

1) $y = (x + 2)^0$;

2) $y = \left(\dfrac{x - 3}{x^2 - 9}\right)^{-1}$;

3) $y = (x - 1)\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^{-1}$.

41.23. Назовите порядок числа x, если:

1) $100 \leqslant x < 1000$;
2) $10\,000 \leqslant x < 100\,000$;
3) $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$;
4) $0{,}0001 \leqslant x < 0{,}001$.

41.24. Назовите порядок числа x, если:

1) $10 \leqslant x < 100$;
2) $0{,}001 \leqslant x < 0{,}01$.

41.25. Порядок числа a равен –4. Определите порядок числа:

1) $10a$;
2) $0{,}1a$;
3) $100a$;
4) $0{,}001a$;
5) $10\,000a$;
6) $1\,000\,000a$.

41.26. Порядок числа b равен 3. Определите порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

41.27. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} - \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right) : \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}} - \dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}} \cdot \dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3} - \dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6} \cdot \dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4} - \dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right) \cdot \dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7} + \dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$;

5) $\dfrac{(a+b-1)^{-1}+(a-b+1)^{-1}}{2(a+b)} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{-2}} - \dfrac{1}{(b-1)^{-2}}\right)$.

41.28. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1} - \dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right) \cdot \left(2b^{-1} + \dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$;

3) $\dfrac{(x-1)(x+1)^{-2} - 2x(x^2-1)^{-1} + (x+1)(x-1)^{-2}}{8x(x^4-1)^{-1}}$.

41.29. Порядок числа a равен –4, а порядок числа b равен 3. Каким может быть порядок значения выражения:

1) ab; 2) $a+b$; 3) $a+10b$; 4) $10a+0{,}1b$?

41.30. Порядок числа m равен 2, а порядок числа n равен 4. Каким может быть порядок значения выражения:

1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m+n$; 4) $0{,}01m+n$?

41.31. Докажите тождество:

1) $\dfrac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y}\cdot\dfrac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}+1}:\dfrac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1}=1;$

2) $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(1+\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right)=\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}.$

Упражнения для повторения

41.32. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

41.33. Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может выкачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

41.34. Тетрадь стоит 19 р. У покупателя имеются монеты только по 5 р., а у продавца — только по 2 р. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество монет соответствующего достоинства должны иметь покупатель и продавец.

§ 42 Функция $y=\dfrac{k}{x}$ и её график

В курсе математики 6 класса вы познакомились с функциональной зависимостью, которая характеризуется тем, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Такую зависимость называют **обратной пропорциональностью**.

Рассмотрим два примера.

Пусть имеется 500 р. Обозначим через x р. цену 1 кг товара, а через y кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 500 р.

Зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью: увеличение цены x в несколько раз приводит к уменьшению количества товара y во столько же раз, и наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y=\dfrac{500}{x}$.

• Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см^2, а стороны — x см и y см. Тогда

$$y = \frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя x в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины y во столько же раз, т. е. зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью.

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$.

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Так как областью определения выражения $\frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме 0, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является такое же множество, т. е. $D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$.

Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	–6	–4	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3	4	6
y	–1	–1,5	–2	–3	–4	–6	6	4	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки (рис. 42.1), координаты которых приведены в таблице.

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 42.2) будет отличаться от графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Среди отмеченных точек не может быть точки, абсцисса которой равна нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определения данной функции. Поэтому график функции $y = \frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

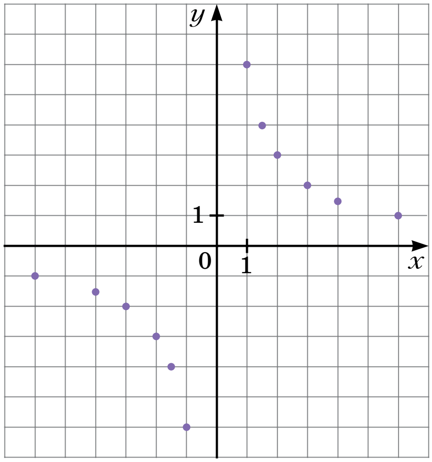


Рис. **42.1**

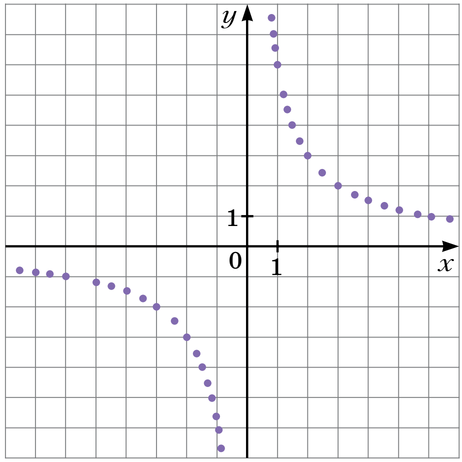


Рис. **42.2**

Кроме того, этот график не имеет общих точек и с осью абсцисс. Действительно, уравнение $\frac{6}{x} = 0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, т. е. $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояние от точки графика функции $y = \frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

Аналогично можно установить, что с уменьшением модуля абсциссы расстояние от точек графика до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображённую на рисунке 42.3.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. На рисунке 42.3 изображена гипербола $y = \frac{6}{x}$.

Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то верно равенство $-y_0 = -\frac{k}{x_0}$. Тогда можно сделать такой вывод: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе. Следовательно, гипербола является симметричной фигурой. Начало координат — центр симметрии гиперболы $y = \frac{k}{x}$.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 42.4 изображён график функции $y = -\frac{6}{x}$. Ветви гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ расположены во II и IV четвертях.

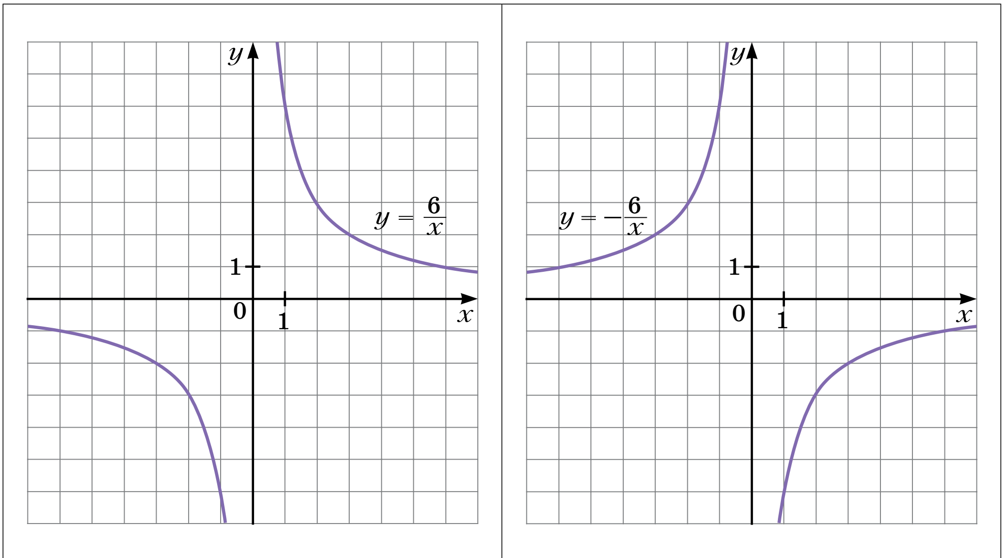


Рис. **42.3** Рис. **42.4**

Заметим, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является множество всех чисел, кроме 0.

В таблице приведены свойства функции $y = \frac{k}{x}$, изученные в этом параграфе.

Область определения	Все числа, кроме 0
Область значений	Все числа, кроме 0
График	Гипербола
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	Не существует
Свойство графика	Начало координат — центр симметрии фигуры

Покажем, как график функции $y = \frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

Пример. Решите уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение. Рассмотрим функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$.

Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 42.5). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и –4. В точках пересечения графиков функций сами функции принимают равные значения. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, т. е. числа –4 и 1 являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает. Действительно, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ и $\frac{4}{-4} = -4 + 3$.

Ответ: –4; 1. ■

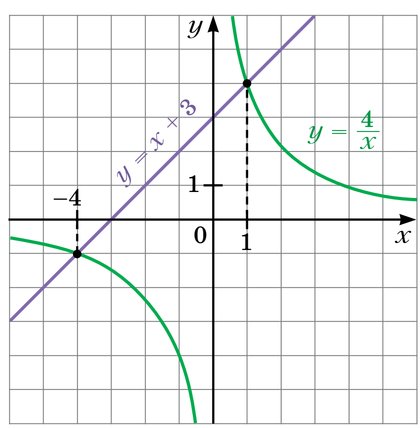


Рис. **42.5**

Описанный метод решения уравнений называют **графическим**. В главе 4 вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда даёт точные результаты. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

1. Объясните, какую зависимость между величинами называют обратной пропорциональностью.

2. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?

3. Какое множество является областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

4. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?

5. Как называют части, из которых состоит гипербола?

6. Какое множество является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$? Если $k < 0$?

8. Объясните, в чём заключается графический метод решения уравнений.

Упражнения

42.1. Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это же расстояние, если его скорость:
1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 1,2 раза?

42.2. Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же самой площади ширину прямоугольника:
1) увеличить в 1,5 раза; 2) уменьшить в 3,2 раза?

42.3. На некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы на эту же сумму денег, если бы её цена за 1 м:
1) уменьшилась в 2,6 раза; 2) увеличилась в 1,6 раза?

42.4. Пешеход прошёл 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

v, км/ч	5		2,4	
t, ч		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулой зависимость t от v.

42.5. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Заполните таблицу, если S — площадь основания, h — высота.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулой зависимость h от S.

42.6. Бригада из семи рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

42.7. Заготовленных кормов хватит для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

42.8. Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

42.9. Задана функция $y = \frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –3; 6; 0,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; –6; 100.

42.10. Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –4; 0,9; 18;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; –3; 8.

42.11. Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; –1;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2; –8;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

42.12. Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; –10;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5; –2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

42.13. Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:
1) $A(-4; -7)$;
2) $B(14; -2)$;
3) $C(0{,}5; 14)$;
4) $D(0{,}2; 140)$.

42.14. Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{48}{x}$, определите, проходит ли график через точку:
1) $A(-6; -8)$;
2) $B(12; -4)$;
3) $C(0{,}3; -16)$;
4) $D(0{,}4; -120)$.

Рис. **42.6**

42.15. На рисунке 42.6 изображён график зависимости времени t движения из пункта A в пункт B от скорости v движения. Пользуясь графиком, определите:

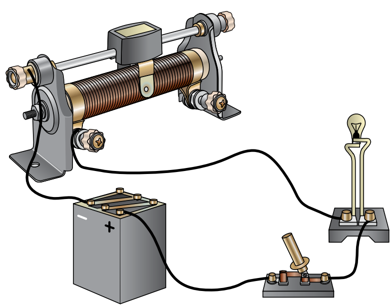


Рис. **42.7**

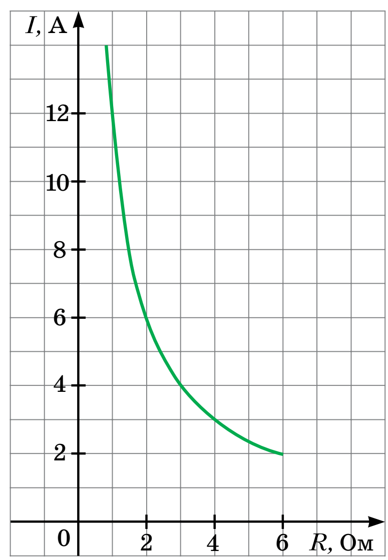


Рис. **42.8**

1) за какое время можно добраться из пункта A в пункт B, если двигаться со скоростью 8 км/ч; 24 км/ч;

2) с какой скоростью надо двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 3 ч; за 4 ч;

3) чему равно расстояние между пунктами A и B.

42.16. Проволочный реостат подключён к блоку питания (рис. 42.7). Сопротивление R реостата зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока I от сопротивления R (рис. 42.8) при условии, что напряжение на концах реостата остаётся неизменным, определите:

1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;

2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;

3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

42.17. Найдите значение параметра k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $A(-5;\ 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6};\ -2\right)$; 3) $C(1{,}5;\ -8)$.

42.18. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10;\ 1{,}6)$. Проходит ли график этой функции через точку:

1) $B(-1;\ -16)$; 2) $C(-2;\ 8)$?

42.19. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{9}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

42.20. Решите графически уравнение:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

42.21. Решите графически уравнение:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

42.22. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

42.23. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

42.24. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

42.25. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -3, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

42.26. Найдите координаты всех точек графика функции $y = \dfrac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

42.27. Найдите координаты всех точек графика функции $y = -\dfrac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

42.28. Исследуйте количество корней уравнения $\dfrac{k}{x} = a$, $k \neq 0$ в зависимости от значения параметра a.

42.29. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{6}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$; 3) $y = -|x|^{-1}$.

42.30. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{если } x \leqslant 2, \\ \dfrac{12}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

42.31. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

42.32. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \dfrac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

42.33. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$; 2) $y = \dfrac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

42.34. Постройте график уравнения:

1) $(xy - 1)(x - 2) = 0$;
2) $(xy + 1)(y - 1) = 0$;
3) $(xy - 1)(|x| - |y|) = 0$;
4) $\dfrac{xy - 1}{x - y} = 0$;
5) $\dfrac{xy + 1}{x - y} = 0$.

42.35. Постройте график уравнения:

1) $x(xy - 1) = 0$; 2) $x^2y^2 - 1 = 0$; 3) $\frac{xy - 1}{x - 1} = 0$.

42.36. Пусть $f(x) = x$. Постройте график функции $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

42.37. Пусть $f(x) = -\frac{1}{x}$. Постройте график функции $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

42.38. Функция f такова, что $f(x) = \frac{4}{x}$. Докажите, что $f(x + 1) - f(x - 1) = -\frac{1}{2}f(x + 1) \cdot f(x - 1)$.

42.39. Найдите функцию f, удовлетворяющую условию $3f(x) + 2f(-x) = -\frac{2}{x}$.

42.40. Найдите функцию f, удовлетворяющую условию $2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}$.

Упражнения для повторения

42.41. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении, его значение не зависит от значений a и b:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left(\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2}\right) - \frac{b}{a - b}.$$

42.42. Решите уравнение:

$$\frac{3}{5x + 25} + \frac{1}{2x - 10} = \frac{5}{x^2 - 25}.$$

42.43. Цену шкафа снизили на 30 %, а спустя некоторое время повысили на 30 %. Как изменилась, увеличилась или уменьшилась, цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

42.44. (*Задача Сунь-Цзы*[1].) Двое мужчин получили монеты, которые они должны были разделить между собой так, что если бы к монетам, которые получит первый из них, прибавить половину монет второго, или к монетам, которые получит второй, прибавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях было бы 48 монет. Сколько монет получил каждый из мужчин?

[1] Сунь-Цзы — китайский математик, который жил в III или IV в.

Итоги главы 5

Область определения выражения

Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет смысл. Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.

Тождество

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Тождественно равные выражения

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Основное свойство рациональной дроби

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Сложение рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Умножение рациональных дробей

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Деление рациональных дробей

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Возведение рациональной дроби в степень

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n выполняется равенство $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n \in \boldsymbol{Z}$.

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основное свойство степени);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Функция обратная пропорциональность

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

Область определения	Все числа, кроме 0
Область значений	Все числа, кроме 0
График	Гипербола
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	Не существует
Свойство графика	Начало координат — центр симметрии фигуры